

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM  
UM CANAL-TIPO ESTENOSE USANDO MÉTODOS COMPACTOS  
E NÃO COMPACTOS DE ALTA ORDEM**

**Katia Prado Fernandes**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Biometria, IBB, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Botucatu, para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU  
São Paulo - Brasil  
Março – 2010

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM  
UM CANAL-TIPO ESTENOSE USANDO MÉTODOS COMPACTOS  
E NÃO COMPACTOS DE ALTA ORDEM**

**Katia Prado Fernandes**

Orientador: Prof. Dr. **Paulo Fernando de Arruda Mancera**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Biometria, IBB, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Botucatu, para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU  
São Paulo - Brasil  
Março – 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. E TRAT. DA INFORMAÇÃO  
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CAMPUS DE BOTUCATU - UNESP  
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: *ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE*

**Fernandes, Katia Prado.**

**Solução numérica das equações de Navier-Stokes em um canal –  
tipo estenose usando métodos compactos e não compactos de alta  
ordem / Katia Prado Fernandes. – Botucatu, 2010.**

**Dissertação (mestrado) – Instituto de Biociências de Botucatu,  
Universidade Estadual Paulista, 2010**

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Fernando de Arruda Mancera  
Assunto CAPES: 21400000**

**1. Biometria. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Análise numérica.**

**Palavras chave: Diferenças finitas; Equações de Navier-Stokes;  
Métodos compactos; Métodos não compactos.**

## Dedicatória

*Este trabalho é dedicado aos meus pais e a minha irmã pelo imenso amor dedicado, incentivo nos estudos e por compreender as minhas ausências e correrias constantes para a realização desse trabalho.*

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me dar força e mostrar-me o caminho certo.

Aos meus pais Vera e Alcides pelo amor e apoio para continuar lutando e alcançar todos os meus objetivos, a minha irmã Kéli por me ouvir nos momentos mais difíceis dessa caminhada e a Vó Nina pelo carinho maravilhoso.

Ao Prof. Dr. Paulo Fernando de Arruda Mancera, meu orientador, agradeço pelos ensinamentos e por exigir sempre que o melhor fosse feito.

Ao Ernesto, que sempre estava disposto a ajudar, transmitindo os seus conhecimentos e incentivando minhas conquistas.

Ao Prof. Dr. Marcelo Messias, pelos ensinamentos e pela confiança dedicada no ingresso do mestrado.

Aos amigos João, Angela, Diogo, Raphael, Luiza, Rosângela, Ernesto/Pai e Sônia, pela torcida pelo meu sucesso.

A todos os professores, funcionários e alunos do Departamento de Bioestatística pela boa convivência e pelo apoio durante a realização desse mestrado.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CNPQ), pelo suporte financeiro parcial para a realização desse projeto de pesquisa.

*Bom mesmo é ir a luta com determinação,  
abraçar a vida com paixão,  
perder com classe e vencer com ousadia,  
pois o triunfo pertence a quem se atreve...  
A vida é muita para ser insignificante.*

Charles Chaplin

# Sumário

	Página
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>vii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>viii</b>
<b>RESUMO</b>	<b>ix</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>x</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução Biológica . . . . .	1
1.2 Motivação Biológica para o Problema Proposto . . . . .	2
1.3 Métodos Numéricos de Alta Ordem . . . . .	6
<b>2 MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>12</b>
2.1 Equações Diferenciais Parciais . . . . .	12
2.2 Equações de Navier-Stokes . . . . .	14
2.3 Formulação dos Métodos . . . . .	17
2.3.1 Fórmulas de Diferenças Finitas . . . . .	18
2.3.2 Método Não Compacto de Quarta Ordem . . . . .	19
2.3.3 Obtenção de um Método Compacto $5 \times 5$ de Quarta Ordem . . . . .	21
<b>3 MODELAGEM NUMÉRICA</b>	<b>24</b>
3.1 Solução Numérica . . . . .	24
3.1.1 Método de Newton . . . . .	24

---

3.1.2	Implementação do Programa . . . . .	27
3.2	Erros . . . . .	28
3.3	Geometria do Problema . . . . .	30
3.4	Malha Computacional . . . . .	31
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>35</b>
4.1	Erros RMS e Máximo para o Método Misto . . . . .	35
4.2	Linhas de Corrente para o Método Misto . . . . .	39
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE</b>	<b>55</b>
<b>I</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES</b>	<b>55</b>
I.1	Discretização – Método Compacto $5 \times 5$ . . . . .	56



## Lista de Figuras

	Página
1	Desenvolvimento da aterosclerose. . . . . 4
2	Canal com uma oclusão. . . . . 6
3	Molécula com 29 pontos. . . . . 19
4	Molécula próxima de uma fronteira sólida. . . . . 20
5	Molécula com 25 pontos. . . . . 22
6	Molécula computacional: (a) $mx = 2$ e $my = 2$ , (b) $mx = 2$ e $my = 1$ . . . 28
7	Canal com uma oclusão. . . . . 30
8	Molécula computacional centrada em $(i, j)$ . . . . . 32
9	Molécula próxima a fronteira sólida. . . . . 32
10	Molécula deslocada uma unidade da fronteira sólida. . . . . 33
11	Linhas de corrente para $Re = 0$ . . . . . 40
12	Linhas de corrente para $Re = 100$ . . . . . 40
13	Linhas de corrente para $Re = 250$ . . . . . 41
14	Linhas de corrente para $Re = 500$ . . . . . 41
15	Linhas de corrente : após a oclusão (a); na oclusão (b) e (c). . . . . 42
16	Dimensão do canal. . . . . 55

## Lista de Tabelas

	Página
1 Erros RMS para o método misto não compacto. . . . .	37
2 Erros máximo para o método misto não compacto. . . . .	38
3 Erros RMS para o método misto compacto. . . . .	38
4 Erros máximo para o método misto compacto. . . . .	39

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM UM CANAL-TIPO ESTENOSE USANDO MÉTODOS COMPACTOS E NÃO COMPACTOS DE ALTA ORDEM

Autora: KATIA PRADO FERNANDES

Orientador: Prof. Dr. PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA

## RESUMO

Considera-se a construção de métodos compacto e não compacto de quarta ordem para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente em uma malha uniforme. Aplica-se esses métodos de alta ordem em um canal-tipo estenose e o conjunto das equações não lineares resultantes da discretização é resolvido pelo método de Newton. Erros RMS e máximo, bem como linhas de corrente são apresentados.

**Palavras-Chave:** Equações de Navier-Stokes; Diferenças Finitas; Métodos Compactos; Métodos não Compactos.

NUMERICAL SOLUTION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS  
USING COMPACT AND WIDE SCHEMES THROUGH A STENOSIS  
CHANNEL-TYPE

Author: KATIA PRADO FERNANDES

Adviser: Prof. Dr. PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA

**SUMMARY**

This work considers the development of compact and wide fourth-order schemes for solving the Navier-Stokes equations in the streamfunction formulation on a uniform grid. These high order schemes are applied in a stenosis channel-type and the set of nonlinear equations resulting from the discretization is solved by Newton's method. The RMS and maximum errors, and also the streamlines are shown.

**Key Words:** Navier-Stokes Equations; Finite Difference; Compact Scheme; Wide Scheme.

# 1 INTRODUÇÃO

No decorrer deste capítulo, encontra-se uma visão geral de aterosclerose e ilustra-se os estudos de alguns pesquisadores que desenvolveram métodos de alta ordem para as equações de Navier-Stokes utilizando diferenças centrais de quarta ordem.

## 1.1 Introdução Biológica

A doença da artéria coronária e o acidente vascular cerebral são manifestações clínicas da aterosclerose (McKay et al., 2005; Murray & Lopez, 1997) e são alvo de inúmeras pesquisas. Nesse trabalho tem-se como motivação biológica o problema da aterosclerose cuja a geometria utilizada assemelha-se a um fluxo sanguíneo passando por um canal com uma oclusão local. Todavia, realizou-se apenas o desenvolvimento e estudo de um método numérico.

A aterosclerose é a causa mais comum de morte nos Estados Unidos, grande parte da Europa e em partes da Ásia (Ibragimov et al., 2007; Mercer et al., 2007; Ross, 1999). De acordo com Mackay & Mensah (2004) há uma estimativa de que 17,5 milhões de pessoas morreram de doenças cardiovasculares em 2005, representando 30% de todas as mortes no mundo. Segundo Libby (2002), é preocupante saber que muitos jovens, com menos de 20 anos, já têm placas de gordura em formação nos seus vasos sanguíneos. A Organização Mundial da Saúde (OMS) preve que neste ano de 2010 as doenças cardiovasculares junto com o câncer sejam as principais causas de morte em todos os países em desenvolvimento (World Health Organization, 2002).

Fazendo um retrospecto, a urbanização ocorrida no século XX nos

países desenvolvidos e, também no Brasil, trouxe alguns problemas, como por exemplo, a diminuição na prática de atividades físicas (UOL Boa Saúde, 2002). Entretanto, vários dados epidemiológicos (Matsudo et al., 2001) comprovam a importância da atividade física regular para a saúde humana. Segundo Godoy (1997), as facilidades proporcionadas pelo avanço tecnológico levam as pessoas a terem uma vida mais sedentária, dificultando o interesse pelas práticas de atividades físicas regulares.

No Brasil, a cada ano, 20 mil jovens são acometidos por acidente vascular cerebral (AVC) (Lopes, 2009), pois uma grande parte dos jovens adota um estilo de vida “não saudável” podendo sofrer de aterosclerose, que até então era comumente associada as pessoas mais velhas (Lopes, 2009). De acordo com Elia Faria Evaristo, “a adoção de hábitos saudáveis é tão importante que poderia evitar pelo menos 30% dos casos de aterosclerose” (Lopes, 2009).

Estudos identificaram que alguns indivíduos têm uma maior propensão ao desenvolvimento da doença. Estas pessoas apresentam os fatores clássicos de risco para aterosclerose, como o tabagismo, a inatividade física e a dieta alta em colesterol (LDL), que são as principais causas da aterosclerose (Emedix, 2008; McKay et al., 2005; Mercer et al., 2007).

Resultados de diversas pesquisas apontam enormes avanços na identificação dos fatores que envolvem o processo da aterosclerose. Entretanto, a descoberta de qual desses fatores é dominante é a chave para um diagnóstico precoce, facilitando assim o tratamento da doença (McKay et al., 2005).

## **1.2 Motivação Biológica para o Problema Proposto**

Durante décadas muitos pesquisadores descreveram a aterosclerose como sendo o acúmulo gradativo de gordura nas paredes das artérias, afirmando que o acúmulo de gordura “rompe” a artéria, e então ocorre ataque cardíaco ou AVC (Fioravante, 2009; Huang et al., 1995; McKay et al., 2005).

Atualmente, sabe-se que a aterosclerose é um processo inflamatório crônico, identificado como uma doença na parede interna da artéria (íntima) e um

processo alimentado pela inflamação (Fioravante, 2009; McKay et al., 2005; Libby, 2002). De acordo com McKay et al. (2005), a inflamação na íntima pode ser desencadeada pelo excesso de um tipo de gordura no sangue, a lipoproteína de baixa densidade (LDL), conhecida popularmente como “colesterol ruim”, que se deposita na íntima, formando uma placa necrótica, selando o fluxo sanguíneo por uma capa fibrosa. Desta forma, para que ocorra um ataque cardíaco ou um acidente vascular é necessário haver uma grande concentração de coágulos na capa fibrosa, levando assim a ruptura dessa capa.

Segundo Fioravante (2009), pode-se acompanhar como inicia-se a inflamação de uma artéria, processo esse que impede a passagem da corrente sanguínea, ou seja, o LDL, representado pelas esferas de cor verde (ver Figura 1(a)), penetra na íntima, fixando-se no interior dessa camada, e então passa por uma reação química conhecida como oxidação. Pela oxidação, as células de defesa do sangue (esferas azuis) que foram atraídas para a íntima, levam a um processo inflamatório (ver Figura 1(b)). Na parede da artéria começam a ser depositadas células sanguíneas mortas que levam a obstrução do fluxo sanguíneo (ver Figura 1(c)). Conhecidas como ateromas, as células mortas (Figura 1(d)) podem vir a prejudicar o funcionamento de órgãos vitais, como o coração, causando infarto, ou o cérebro, provocando um AVC.

Na Europa, foi desenvolvido pela agência reguladora de remédios (EMA) a primeira prótese que evita a formação de coágulos no coração, com previsão de chegar ao Brasil até o final de 2010 (Lopes, 2009).

Já no Brasil, há muitas pesquisas em aterosclerose, destacando-se os estudos realizados pelo Instituto do Coração (Incor) em parceria com universidades e com alguns laboratórios farmacêuticos. Citou-se muitos fatores de risco clássicos para o desenvolvimento da doença, entretanto, um estudo realizado pelo Incor (Pereira, 2005) verificou que muitos pacientes não apresentaram os tais fatores de risco da doença.

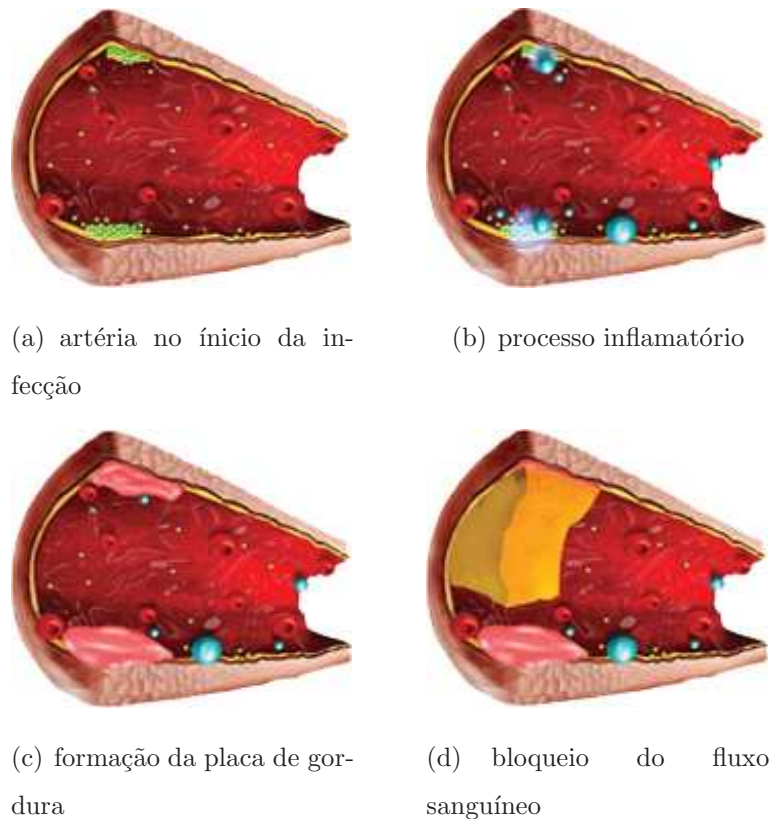


Figura 1: Desenvolvimento da aterosclerose.  
Fonte: Fioravante, C., *Revista Fapesp*, 2009.

Acreditou-se por muito tempo que quanto mais elevado o nível de colesterol no sangue, maior seria o acúmulo de gordura na parede das artérias coronárias, sendo o colesterol decisivo na formação da placa. Mas, estudos recentes encontraram um outro fator importante nesse processo, uma proteína encontrada no sangue chamada homocisteína, que em quantidades elevadas comprometem as artérias coronárias (Fioravante, 2009; Ross, 1999). Esse aumento da proteína altera o endotélio, lesando os vasos sanguíneos e provocando uma inflamação, que favorece a formação das placas de gordura (Pereira, 2005). Com isso, espera-se que mesmo as pessoas não apresentando fatores de risco clássicos, verifiquem periodicamente, através de exames clínicos, as taxas de homocisteína para que não se agrave a doença da artéria coronária.

As pesquisas realizadas apontam que é importante investigar o com-



portamento do fluxo sanguíneo nas regiões lesionadas para que seja possível discutir os vários fatores da aterosclerose. A análise do escoamento permite a comparação da área lesionada com uma área saudável, possibilitando um diagnóstico através da análise de distúrbios na velocidade do fluxo (Carvalho, 1998). Neste sentido, deseje-se investigar o quanto o processo inflamatório altera a passagem do sangue, já que a gravidade da doença depende tanto do local atingido, quanto do número de vasos que foram comprometidos pela falta de irrigação sanguínea (Lopes, 2009).

Nestes últimos anos, vários modelos matemáticos para o problema da aterosclerose têm sido propostos (ver Perktold & Rappitsch (1995); Gijssen et al. (1999); McKay et al. (2005); Arab-Ghanbari et al. (2009)). O trabalho de McKay et al. (2005) tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo matemático que venha a apresentar informações de quais são os fatores dominantes para o desenvolvimento da aterosclerose. Algumas suposições foram feitas no modelo, dentre elas, supuseram que o sangue se comporta como um fluido Newtoniano e para obter a velocidade desse fluido fizeram uso das equações de Navier-Stokes. Arab-Ghanbari et al. (2009) consideraram como objeto de estudo o problema de uma artéria com trombose e também fizeram uso das equações de Navier-Stokes para resolução desse problema. Três modelos com diferentes níveis de oclusão foram considerados e os resultados apontaram que o aumento da região lesionada influencia na recirculação gerando um aumento na tensão de cisalhamento.

Devido a complexidade de relacionar o problema 3D da geometria representada pela Figura 1 com as condições de escoamento observadas clinicamente, bem como, a construção de métodos numéricos de alta ordem, simplificou-se o problema considerando-se um canal tipo estenose retangular (ver Figura 2), que é um modelo simplificado em 2D para problemas de obstrução de artérias e será resolvido via equações de Navier-Stokes na formulação função corrente.

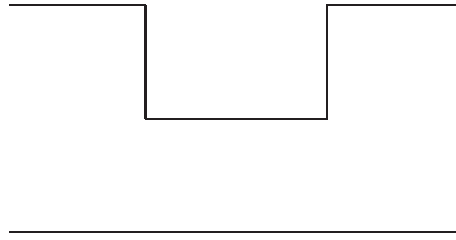


Figura 2: Canal com uma oclusão.

### 1.3 Métodos Numéricos de Alta Ordem

Nas últimas décadas nota-se o desenvolvimento dos métodos de diferenças finitas para resolver as equações de Navier-Stokes, tanto em variáveis primitivas, quanto na formulação função corrente-vorticidade. É usual na literatura encontrar trabalhos que aplicam métodos de diferenças finitas, em especial diferenças centrais de segunda ordem, para resolver problemas de fluxo de fluidos. Gupta & Manohar (1980) é um exemplo desses trabalhos, em que escolheram como modelo o problema da cavidade e compararam a solução numérica obtida com dois métodos de diferenças finitas, os métodos *upwind* e central de segunda ordem, aplicados na resolução das equações de Navier-Stokes.

Nas últimas décadas, muitos pesquisadores examinaram um grande número de métodos de diferenças finitas e descobriram que embora as aproximações de diferença central tenham precisão de segunda ordem elas podem apresentar oscilações não físicas e/ou instabilidade computacional (ver Gupta (1991); Li et al. (1995); Mancera (2003)).

É possível obter métodos numéricos de alta ordem para as equações de Navier-Stokes. Esses métodos numéricos com precisão maior que dois podem ser classificados em duas categorias, sendo eles, métodos compactos e métodos não compactos (ver Mancera (2003); Mancera & Hunt (2006a); Shah et al. (2009)). Os métodos não compacto são obtidos discretizando as equações de Navier-Stokes por

diferença central de quarta ordem e os métodos compactos são construídos sem a necessidade de utilizar condições de fronteira extras para a sua aplicação, quando considera-se a formulação função corrente-vorticidade.

Métodos de diferenças finitas de alta ordem do tipo compacto para as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade são computacionalmente eficientes e estáveis e as soluções numéricas obtidas são altamente precisas (ver Gupta (1991); Li et al. (1995)). Esses métodos têm como atrativo molécula computacional pequena utilizando os oito pontos vizinhos mais próximos do ponto central dessa molécula, enquanto os métodos do tipo não compacto resultam em moléculas computacionais enormes.

Em diversos trabalhos encontra-se o desenvolvimento de um método compacto  $3 \times 3$  para as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade (ver Dennis & Hudson (1989); Gupta (1991)). Entretanto, o trabalho aqui proposto analisa um método compacto de quarta ordem  $5 \times 5$  na formulação função corrente. A escolha pela formulação função corrente tem como atrativo a atribuição de condições de fronteira apenas para a função corrente, sem o uso da vorticidade.

A formulação função corrente-vorticidade é uma outra forma alternativa e simplificada de escrever as equações de Navier-Stokes. Também é dita uma formulação não primitiva, já que reduz o número de incógnitas, ou seja, as componentes da velocidade e a pressão em razão das definições de novas variáveis (Maliska, 1995; Pandit et al., 2007). Essa formulação também apresenta algumas dificuldades relacionadas as condições de fronteira, pois para a vorticidade não há nenhuma condição de fronteira definida, entretanto, para a função corrente há duas condições (Napolitano et al., 1999; Fortuna, 2000). Segundo Maliska (1995), a formulação função corrente-vorticidade só se aplica a problemas bidimensionais. Acredita-se que a não utilização da formulação para o caso tridimensional possa estar associada a cálculos extensos, já que a formulação pode ser usada em três dimensões e para este caso, a vorticidade tem três componentes e a função corrente deve ser substituída

por um vetor também de três componentes (Fletcher, 1991).

Os trabalhos de Dennis & Hudson (1989); Gupta (1991); Wittkopf (1994); Li et al. (1995); Spatz & Carey (1995); Mancera (1996, 2003); Mancera & Hunt (2006a) fazem uso da formulação função corrente-vorticidade. Dennis & Hudson (1989) exibem a obtenção de métodos compactos de alta ordem e ilustram a técnica em que os coeficientes exponenciais das aproximações de quarta ordem são expressados em potências de seus argumentos. Os resultados são apresentados para quatro diferentes problemas, entre eles, o problema da cavidade, mostrando uma excelente precisão dos métodos quando aplicados nesses problemas.

No trabalho de Gupta (1991) desenvolveu-se aproximações de alta ordem para as equações de Navier-Stokes. O problema estudado é o da cavidade. Gupta (1991) também afirma em seu artigo que Dennis & Hudson (1989) redescobriram o seu método compacto  $3 \times 3$ . Na tentativa de melhorar a precisão do trabalho proposto por Gupta (1991), Altas & Burrage (1994) propuseram um termo de correção na aproximação da derivada, através de técnicas *multgrid*.

Li et al. (1995) construíram um método compacto para a formulação função corrente-vorticidade para as equações de Navier-Stokes, estacionárias, bidimensionais. O ponto chave deste trabalho está relacionado com o fato de ser “genuinamente compacto”, pois todas as aproximações estão baseadas na molécula  $3 \times 3$ . Para as condições de fronteira, considerou-se duas condições para a função corrente e nenhuma para a vorticidade e discutiu-se nesse trabalho o fato de que ao especificar a vorticidade na fronteira pode-se perder a realidade física do problema. Mas, em Spatz & Carey (1995) mostra-se que usar a vorticidade na fronteira é equivalente a técnica usada por (Li et al., 1995).

Os trabalhos de Gupta (1991); Li et al. (1995); Spatz & Carey (1995), em malhas uniformes, apresentaram resultados para o problema da cavidade, utilizando seus métodos compactos de quarta ordem para resolver as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade. Esses trabalhos diferem nas manipulações das condições de fronteira de não deslizamento e nas manipulações

algébricas com as expressões de diferenças finitas. Os três trabalhos desenvolveram aproximações compactas de quarta ordem para as componentes da velocidade e verificaram que os erros para os métodos compactos de quarta ordem são menores do que os erros do método de diferença central de segunda ordem e para os problemas com solução analítica conhecida a ordem numérica é aproximadamente quatro.

Em Spitz (1998) foram comparadas entre si as diferentes condições de fronteira usadas por Gupta (1991), Li et al. (1995) e Spitz & Carey (1995) sendo respectivamente, a fórmula de Jensen de  $O(h^2)$  e sua reformulação de  $O(h^3)$ , o método da fronteira computacional e as formulações compactas de  $O(h^2)$  e  $O(h^3)$ . Após essas comparações foram propostas novas condições de fronteira para os trabalhos, sendo elas, uma fórmula de Jensen de  $O(h^4)$  e uma formulação compacta de quarta ordem que inclui correções para os métodos *upwind* e de alta ordem.

Após alguns anos, Li & Tang (2001) deram continuidade ao trabalho de Li et al. (1995) apresentando soluções para as equações de Navier-Stokes para problemas dependentes do tempo. Spitz & Carey (2001) estenderam o método proposto em Spitz & Carey (1995), porém agora para o caso de problemas dependentes do tempo. E & Liu (1996) desenvolveram um método de diferenças finitas com precisão de quarta ordem que simplifica as manipulações algébricas envolvidas para as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente-vorticidade, sendo que a vantagem desse método compacto é que, em qualquer nível de tempo há dois tipos de equações elípticas a serem resolvidas, uma para a função corrente e outra para a vorticidade, juntamente com a equação do tipo parabólica para a evolução temporal da solução.

Henshaw (1994) resolveu as equações de Navier-Stokes, dependentes do tempo, com o uso de diferenças finitas em malhas curvilíneas sobrepostas em duas e três dimensões. O elemento chave do método aplicado consiste na escolha das condições de fronteira, sendo uma para a pressão e condições de fronteira extras para aplicação do método de quarta ordem. Hunt (1993) reanalisou as condições de fronteira extras propostas por Henshaw (1994). Em Henshaw et al. (1994) discutiu-se

os métodos de quarta ordem para as equações de Navier-Stokes incompressíveis e para equações parabólicas e verificou-se que para a aplicação dos métodos não compactos é necessário o uso de três condições de fronteira numérica para determinar a solução dos pontos próximos as fronteiras rígidas. Wittkopf (1994) apresentou dois métodos de diferenças finitas compacto e não compacto com precisão de quarta ordem, para resolver o problema da cavidade.

Tendo como motivação os trabalhos de Henshaw (1994) e Henshaw et al. (1994), Mancera & Hunt (1997) aplicaram os métodos não compacto para resolver as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente e eliminaram as dificuldades em se aplicar esses métodos quando a solução procurada está próxima as fronteiras rígidas. Para que as dificuldades fossem eliminadas, alguns cuidados foram necessários ao se trabalhar com os pontos fantasmas advindos da aplicação dos métodos, sendo necessário o uso das condições de fronteira extras para que o problema do canal com uma constrição suave fosse resolvido.

No trabalho de Mancera (2003) tem-se a continuação da pesquisa de Mancera & Hunt (1997), resolvendo agora as equações de Navier-Stokes utilizando um método compacto de quarta ordem que foi proposto inicialmente por Gupta et al. (1985). Em Mancera & Hunt (1999), considerou-se um método não compacto (molécula de 29 pontos) para resolver as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente numa malha não uniforme, aplicado em um canal com uma constrição suave.

Foi proposto em Mancera & Hunt (2006a,b) um procedimento para obter métodos compactos, particularmente métodos de quarta ordem, para as equações de Navier-Stokes utilizando o programa de manipulação algébrica *Maple*. Vale ainda ressaltar que Mancera & Hunt (2006a) exibem um processo de construção do método compacto que se baseia em Gupta (1991) e Li et al. (1995). O procedimento empregado para testar o método consiste na resolução de um problema com solução analítica e outros seis do tipo cavidade. Mancera & Hunt (2006b) estenderam o procedimento mencionado anteriormente para malhas não uniforme e resolveram o

problema do degrau com face para frente.

Recentemente, Pandit et al. (2007) construíram vários métodos de alta ordem para resolver as equações de Navier-Stokes em geometrias irregulares. O método foi aplicado em três problemas com diferentes complexidades físicas, sendo eles, um com solução analítica, a cavidade e o canal com uma constricção. Foi proposto por Pandit et al. (2008) um método compacto de alta ordem com molécula compacta de 9 pontos e o mesmo foi testado para problemas com uma solução analítica, um canal com uma constricção e a cavidade. Em Pandit (2008), apresenta-se uma nova formulação dita função corrente-velocidade que evita as dificuldades associadas com as formulações tradicionais (função corrente-vorticidade e variáveis primitivas) e pode ser aplicada para resolver as equações de Navier-Stokes, tanto em geometrias complexas, quanto as retangulares. Ao aplicar essa formulação, verificou-se a eficiência do método apresentando resultados precisos também em malhas grosseiras para os seguintes problemas, sendo eles, um com solução analítica, a cavidade, um canal com uma constricção suave e o canal dilatado. Nota-se que em todos os trabalhos mencionados é considerado a geometria proposta por Mancera & Hunt (1997), a qual também é considerada em Gustafsson (2008).

Baseado nos trabalhos já mencionados, apresenta-se neste trabalho um estudo das equações de Navier-Stokes na formulação função corrente e constrói-se um método compacto e um não compacto, ambos  $5 \times 5$  de quarta ordem, aplicados em uma geometria como a exibida na Figura 2. Os detalhes relacionados com a construção dos métodos são apresentados no capítulo 2.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Dinâmica de fluidos computacional é um dos campos da ciência que tem como objetivo descrever o comportamento dos fluidos (gases ou líquidos) e das leis que regem este comportamento através da obtenção de soluções numéricas para um sistema de equações diferenciais (Li, 1998). Os fluidos são geralmente classificados em compressíveis e incompressíveis, sendo que o primeiro sofre variações na densidade, enquanto no segundo a densidade permanece constante. Um aspecto relevante de um fluido é a sua viscosidade que pode ser interpretada como uma medida da resistência ao cisalhamento pelo fluido (Nachbin, 2001). Com base nessa resistência ao cisalhamento, pode-se classificar os fluidos em newtonianos, em que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação, e os não newtonianos que não obedecem esse comportamento.

Qualquer escoamento de um fluido é governado pelas equações de Navier-Stokes, as quais constituem um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de fluidos compressíveis ou incompressíveis, turbulentos e laminares. Em particular, essas equações modelam alguns problemas de dinâmica dos fluidos como o fluxo sanguíneo através de artérias, veias e o movimento de água e rios.

### 2.1 Equações Diferenciais Parciais

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são utilizadas para estudar muitos fenômenos físicos e biológicos. As grandezas físicas procuradas, como, por exemplo, velocidade e pressão de um fluido, normalmente, são representadas por modelos



que dependem de muitas variáveis (Cunha, 2003; Fortuna, 2000).

Para efeito de classificação, divide-se as EDPs em três categorias básicas:

1. Elípticas (normalmente associadas com problemas estacionários).

Um exemplo de equação elíptica é dado por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

que é a equação de Laplace.

2. Parabólicas (associadas com problemas de fluxo contendo mecanismos de dissipação).

Um exemplo de equação parabólica é a equação do calor, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2)$$

em que  $T$  é a temperatura e  $\alpha$  é o coeficiente de difusividade térmica do material.

3. Hiperbólicas (em geral associadas com problemas de fluxo que não contenham mecanismos de dissipação).

Um exemplo de equação hiperbólica é dado por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3)$$

que é a equação da onda, em que a constante  $a$  é a velocidade de propagação da onda.

Em geral EDPs podem ser relacionadas com problemas de fluxo de fluido, sendo as equações de Navier-Stokes o exemplo mais importante.

## 2.2 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes que modelam o escoamento de fluidos newtonianos, incompressíveis, bidimensionais, turbulentos, laminares e viscosos na forma não conservativa são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

em que  $u$  e  $v$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $P$  é a pressão,  $\rho$  é a massa específica e  $\mu$  é o coeficiente da viscosidade do fluido.

Nas equações (4) e (5), o primeiro termo do lado esquerdo é o termo transiente, os demais termos, também do lado esquerdo, são termos convectivos. O primeiro termo do lado direito representa o gradiente de pressão, enquanto o último é o termo viscoso.

As equações governantes do movimento do fluido são obtidas a partir dos princípios físicos:

1. Conservação de massa:

A equação (6) é conhecida como equação da continuidade, descrevendo a taxa de variação da massa por unidade de volume.

2. Conservação de momento linear:

Representados por (4) e (5), essas equações escritas na forma não conservativa para as respectivas direções  $x$  e  $y$  representam a aplicação da segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \quad (7)$$

O escoamento de um fluido depende da geometria e conseqüentemente das condições de contorno do modelo e de suas propriedades dimensionais (físicas),

que podem ser agrupadas em parâmetros adimensionais que mantêm o comportamento do escoamento independente de qualquer sistema de unidade. Em dinâmica dos fluidos computacional é frequente o emprego de formas adimensionais, tendo como objetivo mostrar os efeitos físicos contidos nas equações, e ainda formular o modelo independente de qualquer sistema de unidade (Ferreira et al., 2005). A adimensionalização das equações de Navier-Stokes de (4)-(6) pode ser feita a partir das transformações:

$$\bar{u} = \frac{u}{U_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_0}, \quad (8)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{d}, \quad \bar{y} = \frac{y}{d}, \quad (9)$$

$$\bar{t} = t \frac{d}{U_0}, \quad (10)$$

em que  $U_0$  e  $d$  são, respectivamente, a velocidade característica e o comprimento característico.

Substituindo-se as transformações de (8)-(10) nas equações (4)-(6) e desprezando-se as barras, para simplificar a notação, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

em que  $Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu} = \frac{U_0 d}{\nu}$  é o número de Reynolds, um parâmetro adimensional para escoamentos incompressíveis. Nota-se ainda que esse parâmetro adimensional aparece como coeficiente nas equações adimensionalizadas. Fisicamente, o número de Reynolds pode ser expressado como a razão entre as forças inerciais (responsáveis pelo movimento do fluido) e as forças viscosas.

Neste trabalho considera-se todas as derivadas em relação a  $t$  nulas, devido ao estudo de problemas estacionários.

Mencionou-se na seção 1.3 que as equações de Navier-Stokes podem ser escritas em formulações alternativas. No presente estudo, utiliza-se as equações

de Navier-Stokes na formulação função corrente. Entretanto, alguns conceitos são importantes para se chegar a essa formulação.

Define-se a vorticidade,  $\zeta$ , em um ponto do fluido como

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (14)$$

A vorticidade é a medida de rotação de um elemento do fluido em torno de um ponto. Essa grandeza dá a idéia de movimentos circulares e de redemoinhos no fluido.

A função corrente  $\psi$  é obtida por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (15)$$

de modo que satisfaz a equação da continuidade (13) automaticamente. As linhas em que a função corrente  $\psi$  são constantes são chamadas de linhas de corrente (ver seção 4.2).

Diferenciando a equação (11) em relação a  $y$  e a equação (12) em  $x$ , subtraindo as expressões obtidas e substituindo a vorticidade definida em (14), obtém-se

$$-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (16)$$

Deste modo, substituindo (15) na equação (14), tem-se

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta. \quad (17)$$

Essa equação é conhecida como equação da função corrente e é classificada como uma EDP elíptica.

De modo análogo, substituindo (15) em (16) encontra-se

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \quad (18)$$

As expressões (17) e (18) formam a formulação função corrente-vorticidade das equações de Navier-Stokes. Essa formulação é equivalente as equações (4)-(6).

Para se obter a formulação função corrente, diferencia-se a equação (17) em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (19)$$

Em seguida, diferencia-se novamente a equação (19) em relação a  $x$ :

$$-\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (20)$$

De maneira análoga, diferencia-se a equação (17) em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (21)$$

e com o resultado obtido em (21), diferencia-se em relação a  $y$  para obter:

$$-\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}. \quad (22)$$

Substituindo (19)-(22) na equação (18), tem-se:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right), \quad (23)$$

a qual é chamada de formulação função corrente das equações de Navier-Stokes.

Essas são as equações objeto desse estudo e a solução numérica dessas EDPs não-lineares, com condições iniciais e de fronteira apropriadas, é apresentada no capítulo 3.

## 2.3 Formulação dos Métodos

Devido ao fato das equações, que em geral, modelam problemas de fluxo de fluido não apresentarem soluções analíticas, faz-se necessário a aplicação de técnicas numéricas para resolvê-las. Essas equações são substituídas por um sistema de equações algébricas. Na literatura, encontra-se diversas técnicas para obter o sistema de equações algébricas, como por exemplo, diferenças finitas (ver Li et al. (1995)), elementos finitos (ver Soriano (2003)), volumes finitos (ver LeVeque (2002)) e métodos espectrais (ver Lele (1992)).

Nesse trabalho, escolheu-se a técnica de diferenças finitas que será abordada a seguir.

### 2.3.1 Fórmulas de Diferenças Finitas

Fórmulas de diferenças finitas para as derivadas são obtidas usando a expansão em série de Taylor ou através de interpolação polinomial (Cuminato & Meneguette Junior, 1999). Fornberg (1988a) apresenta um algoritmo para obter fórmulas de diferenças finitas para derivadas de qualquer ordem em uma malha unidimensional. Wittkopf (1994) baseou-se em Fornberg (1988a) e desenvolveu um programa no Maple para obter essas fórmulas. Apresenta-se a seguir fórmulas de diferenças centrais de segunda e quarta ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2h} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + O(h^2), \\
 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{12h} (-\psi_{i+2,j} + 8\psi_{i+1,j} - 8\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}) + O(h^4), \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) + O(h^2), \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} (-\psi_{i+2,j} + 16\psi_{i+1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j}) + O(h^4), \\
 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{1}{2h^3} (\psi_{i+2,j} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} - \psi_{i-2,j}) + O(h^2), \\
 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{1}{8h^3} (-\psi_{i+3,j} + 8\psi_{i+2,j} - 13\psi_{i+1,j} + 13\psi_{i-1,j} - 8\psi_{i-2,j} + \psi_{i-3,j}) \\
 + O(h^4), \\
 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4} (\psi_{i+2,j} - 4\psi_{i+1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}) + O(h^2), \\
 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{6h^4} (-\psi_{i+3,j} + 12\psi_{i+2,j} - 39\psi_{i+1,j} + 56\psi_{i,j} - 39\psi_{i-1,j} + 12\psi_{i-2,j} \\
 - \psi_{i-3,j}) + O(h^4).
 \end{array} \right. \quad (24)$$

em que  $h$  é o espaçamento da malha e  $(i, j)$  são pontos do domínio computacional. A expressão  $O(h^p)$  é lida como “ordem de  $h$  em relação à  $p$ -ésima potência”. Escreve-se

$Erro = O(h^p)$ , se existe uma constante  $K > 0$  tal que, se  $h > 0$  e suficientemente pequeno, tem-se:

$$|Erro| \leq Kh^p. \quad (25)$$

Também é possível obter derivadas mistas através das expressões em (24), um exemplo é dado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h^2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{h^2} \left( \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}}{2h} - 2 \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}}{2h} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

### 2.3.2 Método Não Compacto de Quarta Ordem

Um método não compacto de quarta ordem para as equações de Navier-Stokes estacionárias é obtido aproximando todas as derivadas da equação (23) por diferenças centrais de quarta ordem (ver equações (24)), o que resulta em uma molécula computacional de 29 pontos. A molécula computacional é mostrada na Figura 3, com os seguintes pontos cardeais:

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{-1}{6h^4} + \frac{Re DY}{8h^3}, \quad O = \frac{-1}{6h^4} - \frac{Re DY}{8h^3}, \\ N = \frac{-1}{6h^4} - \frac{Re DX}{8h^3}, \quad S = \frac{-1}{6h^4} + \frac{Re DX}{8h^3}, \end{array} \right. \quad (27)$$

em que  $h$ ,  $DX$  e  $DY$ , são respectivamente, o espaçamento da malha e aproximações de quarta ordem para  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ .

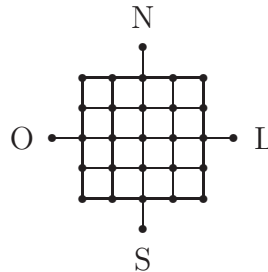


Figura 3: Molécula com 29 pontos.

Métodos numéricos cuja molécula computacional tem muitos pontos, como esta de 29 pontos, podem causar algumas dificuldades quando a solução está sendo calculada próxima a uma fronteira, uma vez que para aplicação do método não compacto é requerida uma condição de fronteira extra (ver Figura 4). Da aplicação da condição de contorno de não deslizamento tem-se duas condições de fronteira para a função corrente,  $\psi = 1$  e  $\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0$  com  $\eta = x$  ou  $y$ . Entretanto, são requeridas três condições.

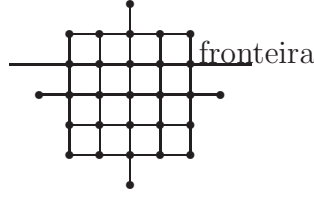


Figura 4: Molécula próxima de uma fronteira sólida.

Para as fronteiras rígidas horizontais, tem-se que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad (28)$$

e então para o ajuste do método é necessário substituir na equação (23) a condição dada em (28), logo:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = 0, \quad (29)$$

fornece a condição de fronteira extra utilizada no método não compacto de quarta ordem. Condição similar é obtida para as fronteiras rígidas verticais.

A derivada de quarta ordem  $\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}$  pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4} (\psi_{i,j+2} - 4\psi_{i,j+1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2}) - \frac{1}{6}h^2 \frac{\partial^6\psi}{\partial y^6} + O(h^4), \quad (30)$$

que é de quarta ordem se  $\frac{\partial^6\psi}{\partial y^6} = 0$  na fronteira.

Derivando a equação (23) duas vezes com relação a  $y$ , mostra-se que  $\frac{\partial^6\psi}{\partial y^6} = 0$ , e conclui-se que a expressão (29) é de quarta ordem na fronteira.



Para acomodar o método não compacto na fronteira necessita-se de dois pontos fantasmas (fora do domínio computacional) para cada fronteira. O questionamento de como se deve tratar os pontos próximos a fronteira é importante, pois possibilita o estudo dos métodos compactos que serão apresentados na próxima seção.

### 2.3.3 Obtenção de um Método Compacto $5 \times 5$ de Quarta Ordem

Através das idéias apresentadas anteriormente para a construção do método não compacto de quarta ordem usando diferenças centrais de quarta ordem é possível obter um método compacto de quarta ordem para a equação (23) tendo molécula computacional  $5 \times 5$ .

O procedimento para se construir um método compacto de quarta ordem para a equação (23) é de Fornberg (1992) e testado exhaustivamente por Wittkopf (1994) baseia-se na eliminação dos pontos cardeais. Sejam

$$\begin{aligned}
 NS_4 & : \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 NS_x & : \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} + 2 \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
 & \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 NS_y & : \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^4 \partial y} + 2 \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y^5} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) \\
 & \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
NS_{xx} &: \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6} + 2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^2 \partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^4 \partial y} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \right) \\
&+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\
&- 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
NS_{yy} &: \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^4 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \psi}{\partial y^6} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y^5} \right) \right) \\
&+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\
&+ \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0,
\end{aligned} \quad (35)$$

respectivamente, a equação de Navier-Stokes na formulação função corrente (ver equação (23)) e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem em relação a  $x$  e a  $y$ . Para as expressões (32)-(35) aproxima-se todas as derivadas de ordem superior a dois usando diferença central de segunda ordem, e as outras por diferença central de quarta ordem. Estas aproximações são denotadas por  $[NS_x]$ ,  $[NS_{xx}]$ ,  $[NS_y]$  e  $[NS_{yy}]$ . A equação  $NS_4$  é aproximada por diferença central de quarta ordem, que é denotada por  $[NS_4]$ . Esta aproximação resulta numa molécula como já exibida na Figura 3, com os pontos cardeais dados em (27).

A equação

$$[NS_4] + h^2 \left( \frac{[NS_{xx}] + [NS_{yy}]}{6} + Re \left( \frac{DX[NS_y] - DY[NS_x]}{12} \right) \right) = 0, \quad (36)$$

elimina os pontos cardeais resultando em um método compacto  $5 \times 5$  (ver Figura 5) para a equação (23), com precisão  $O(Re^2 h^4)$ .

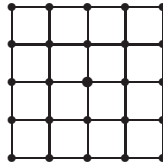


Figura 5: Molécula com 25 pontos.

---

Após os detalhes relacionados com a obtenção dos métodos de alta ordem é importante lembrar que o método não compacto tem erro de truncamento de ordem  $O(Re h^4)$ , enquanto o erro de truncamento para o método compacto é de ordem  $O(Re^2 h^4)$ . Nota-se que ambos os erros de truncamento possuem o termo  $h^4$ , sendo então o  $Re$  a grandeza decisiva para a precisão. Com isso, através da análise dos erros de truncamento dos métodos, verifica-se que para números de Reynolds grandes o método compacto é menos preciso do que o método não compacto (ver Li (1998); Mancera & Hunt (1997)).

## 3 MODELAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo descreve-se o método de Newton utilizado para resolver o sistema de equações não lineares e discuti-se alguns detalhes da implementação do programa principal. Em seguida, estima-se os erros para um método de quarta ordem, apresenta-se as condições de fronteira impostas e os procedimentos utilizados para a aplicação dos métodos, referidos no capítulo 2, na geometria do problema.

### 3.1 Solução Numérica

Para encontrar a solução de sistemas de equações não lineares, aplica-se métodos iterativos que fornecem a solução do sistema com uma determinada precisão requerida. Muitos sistemas algébricos de equações provenientes de discretizações de problemas de dinâmica de fluidos computacional são resolvidos pelo método de Newton, como por exemplo, Fornberg (1988b) resolve o problema de um fluido passando por uma esfera, Hunt (1990) resolve o problema do canal e Wittkopf (1994) resolve o problema da cavidade. Neste trabalho, também considera-se o método de Newton para resolver o sistema resultante da discretização, apresentando-se uma breve descrição do mesmo e do código desenvolvido.

#### 3.1.1 Método de Newton

O método de Newton, também conhecido por Newton-Raphson, foi proposto originalmente e publicado por Isaac Newton para encontrar raízes de equações não lineares (Cunha, 2003). O método é um dos mais utilizados para encontrar a solução de sistemas não lineares, pois a convergência é quadrática, neces-

sitando de poucas iterações (Burden & Faires, 2003). Este método oferece vantagens e desvantagem.

As vantagens são:

- solução numérica com alto grau de precisão;
- facilidade para implementar as condições de fronteira em paredes rígidas.

A desvantagem é:

- alto custo computacional devido a inversão da matriz jacobiana.

A discretização das equações de Navier-Stokes resulta em um sistema de equações não-lineares. Considera-se um sistema de equações algébricas da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (37)$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor de incógnitas e  $\mathbf{F}$  é o vetor de equações.

Seja  $\mathbf{x}^{(k)}$  uma aproximação para  $\mathbf{x}$  e  $\epsilon^{(k)}$  uma correção tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)} + \epsilon^{(k)}. \quad (38)$$

Por expansão em série de Taylor, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + \epsilon^{(k)}) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \epsilon^{(k)} \\ &+ \text{termos de alta ordem} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

em que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  é a matriz jacobiana. Então, desprezando os termos de alta ordem, tem-se

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \simeq -\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \epsilon^{(k)}. \quad (40)$$

A expressão (40) dá um procedimento para calcular  $\epsilon^{(k)}$ . O esquema iterativo é escrito como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \epsilon^{(k)}, \quad (41)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \epsilon^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (42)$$

desde que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$  não seja uma matriz singular e um valor inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  é dado.

Apresenta-se a seguir uma definição e um teorema acerca do método de Newton.

**Definição 1. (Burden & Faires, 2003)** *Suponha uma sequência que converge para  $x$ ,  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , com  $x_k \neq x$  para todo  $k$ . Se as constantes positivas  $\alpha$  e  $\lambda$  existem com*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x\|}{\|x_k - x\|^\alpha} = \lambda, \quad (43)$$

*então  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge para  $x$  com ordem de convergência  $\alpha$  e com erro assintótico constante  $\lambda$ .*

Com base nessa definição, a convergência do método para

- (i)  $\alpha = 1$ , é linear;
- (ii)  $\alpha = 2$ , é quadrática.

Seja  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  definida como

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (44)$$

**Teorema 1. (Burden & Faires, 2003)** *Seja  $s$  uma solução de  $G(x) = x$  em que cada entrada  $g_{ij}(x)$  é uma função  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Supõe-se que existe um número  $\delta > 0$  que satisfaz*

- (i)  $\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_j}$  é contínua em  $N_\delta = \{x \mid \|x - s\| < \delta\}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ ;
- (ii)  $\frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}$  é contínua e  $\frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \leq M$  para algum  $M$  constante, sempre que  $x \in N_\delta$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, n$ ;
- (iii)  $\frac{\partial g_i(s)}{\partial x_k} = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, n$ , então existe um número  $\hat{\delta} \leq \delta$  tal que a sequência gerada por  $x^k = G(x^{(k-1)})$  converge quadraticamente para  $s$  utilizando qualquer escolha para  $x^0$ , desde que  $\|x^{(0)} - s\| < \hat{\delta}$ . Além disso,

$$\|x^{(k)} - s\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - s\|_\infty^2, \text{ para cada } k \geq 1.$$

O método dado nas equações (41) e (42) é chamado de método de Newton para sistemas. O teorema acima fornece as condições para a convergência do método e mostra que se a convergência ocorre ela é quadrática, desde que a solução  $\mathbf{x}^{(0)}$  esteja suficientemente próxima da solução.

### 3.1.2 Implementação do Programa

Para resolver o sistema de equações resultante da discretização das equações de Navier-Stokes utilizou-se o método de Newton. Esse método tem sido amplamente aplicado em problemas de fluxo de fluidos. Por exemplo, Hunt (1990), Mancera (2003, 2005) e Mancera & Hunt (1997, 2006a,b) resolvem problemas tipo canal, Wittkopf (1994) e Li et al. (1995) resolvem o problema da cavidade.

O programa foi implementado em linguagem Fortran 95 e tem como parte principal a subrotina *function eqn*, a qual é fornecida pelo usuário e é formada pela discretização das equações de Navier-Stokes. O programa resolve kd equações diferenciais parciais discretizadas num retângulo com  $n_x \times n_y$  pontos. Para cada nó (i,j,k),  $i=0, \dots, n_x$ ;  $j=0, \dots, n_y$ ; em que k, pode assumir os valores 1 para a função corrente, ou 2 para a vorticidade. No problema proposto tem-se que  $k=1$  e para cada nó, associa-se a variável  $u(i,j,k)$  a uma equação algébrica da forma  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . No programa a equação (37) é composta pela discretização das equações governantes e pelas condições de fronteira (ver Apêndice I). A equação discretizada de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  deve ser inserida pelo usuário, sendo escrita na subrotina *function eqn*.

É necessário também fornecer  $m_x$  e  $m_y$  que correspondem a quantidade máxima de pontos da molécula computacional nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Na Figura 6 tem-se exemplos de moléculas computacionais com diferentes valores de  $m_x$  e  $m_y$ .

A matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ , dada na equação (39), é calculada na subrotina

do programa de Newton, sendo os seus elementos obtidos por

$$J_{kl,ij} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial \Phi_{ij}} \simeq \frac{1}{\epsilon} (F_{kl}(\dots, \Phi_{ij} + \epsilon, \dots) - F_{kl}(\dots, \Phi_{ij}, \dots)), \quad (45)$$

em que  $\epsilon = 10^{-6}$ . A inversão da matriz é feita na mesma subrotina através do método de eliminação de Gauss.

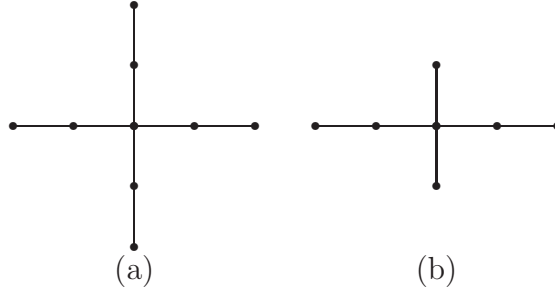


Figura 6: Molécula computacional: (a)  $mx = 2$  e  $my = 2$ , (b)  $mx = 2$  e  $my = 1$ .

### 3.2 Erros

A utilização de técnicas numéricas tem como objetivo encontrar soluções suficientemente precisas com o mínimo de esforço. O erro de truncamento local pode ser considerado o primeiro caminho para analisar a precisão de um método numérico (Burden & Faires, 2003).

Baseado em Mancera (1996), considera-se  $L_h(\bar{\phi}) = 0$  como sendo a aproximação de uma equação diferencial parcial com solução exata  $\bar{\phi}$ . Ao substituir  $\bar{\phi}$  por  $\phi$  que é a solução exata da EDP, o valor  $L_h(\phi)$  é chamado de erro de truncamento local. O erro de truncamento local mede a quantidade pela qual a solução exata de uma EDP não satisfaz a equação de diferença que está sendo usada para aproximações em uma etapa específica. Assume-se que o erro de truncamento local, tem o seguinte comportamento

$$L_h(\phi) \simeq Kh^\beta, \quad (46)$$

em que  $h$  é o espaçamento da malha,  $K$  é uma constante real e  $\beta$  é a ordem numérica do método observada.



Supõe-se que  $\phi$  é a solução exata,  $\phi^F$  a solução na malha mais fina,  $\phi^M$  a solução na malha com a metade do número de pontos da malha fina e  $\phi^C$  a solução com um quarto do número de pontos em relação a  $\phi^F$ , logo, para um método de quarta ordem, tem-se

$$E_F = \phi - \phi^F \simeq Kh^4, \quad (47)$$

$$E_M = \phi - \phi^M \simeq K(2h)^4. \quad (48)$$

Eliminando  $\phi$  das expressões (47) e (48), tem-se

$$\phi^F - \phi^M \simeq E_F(2^4 - 1). \quad (49)$$

Logo, o erro na malha mais fina é dado por

$$E_F \simeq \frac{\phi^F - \phi^M}{15}. \quad (50)$$

A expressão (50) estima os erros de um método de quarta ordem para duas diferentes malhas de pontos, uma com o dobro de pontos da outra.

É possível ainda estimar a ordem numérica do método de quarta ordem. Para tanto, considera-se as soluções  $\phi$ ,  $\phi^F$ ,  $\phi^M$  e  $\phi^C$  definidas anteriormente, então

$$\phi - \phi^F \simeq Kh^\beta, \quad (51)$$

$$\phi - \phi^M \simeq K(2h)^\beta, \quad (52)$$

$$\phi - \phi^C \simeq K(4h)^\beta. \quad (53)$$

Eliminando  $\phi$  e  $K$ , obtém-se a ordem numérica do método dada por

$$\beta = \frac{\ln((\phi^M - \phi^C)/(\phi^F - \phi^M))}{\ln 2}. \quad (54)$$

Nos resultados do capítulo 4, utilizam-se as seguintes normas para estimar o erro global:

$$\text{RMS}(1_2): \|\phi^F - \phi^M\|_2 = \left[ \frac{1}{N} \sum (\phi_{i,j}^F - \phi_{i,j}^M)^2 \right]^{1/2},$$

$$\text{Máximo}(1_\infty): \|\phi^F - \phi^M\|_\infty = \max |\phi_{i,j}^F - \phi_{i,j}^M|,$$

em que  $N$  é o número de pontos na malha, sendo, respectivamente, nominados como erro do quadrado médio (*root mean square* (RMS)) e erro máximo.

### 3.3 Geometria do Problema

Considera-se o problema do canal com duas quinas reentrantes, tendo paredes sólidas em  $y = \pm 1$  para  $x < m$  e  $x > n$ ,  $y = \pm \frac{1}{2}$  para  $m < x < n$  e  $\frac{1}{2} \leq |y| \leq 1$  para  $x = m$  e  $x = n$ , em que  $m$  e  $n$  são inteiros,  $m < n$  (ver Figura 7). Devido a simetria na geometria do problema é resolvido para  $y \geq 0$ .

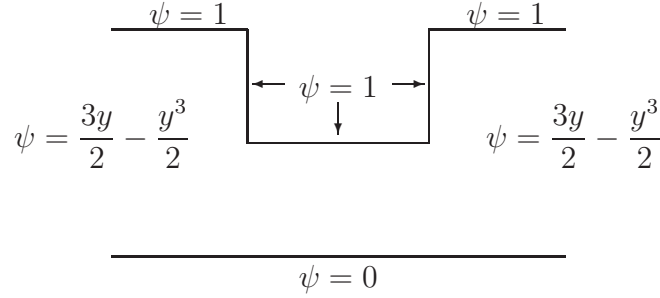


Figura 7: Canal com uma oclusão.

As condições de fronteira são de fundamental importância para a obtenção de uma solução que tenha sentido físico (Ferreira et al., 1998). As condições de fronteira para o problema mostrado na Figura 7 são:

(i) fronteiras sólidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ em } y = 1, \quad x \leq m, x \geq n, \text{ e } y = \frac{1}{2}, m < x < n, \\ \psi = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ em } x = m \text{ e } x = n, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \end{array} \right. \quad (55)$$

em que  $\psi$  é constante nas fronteiras sólidas.

As condições  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$  são conhecidas como condições de não deslizamento e estão relacionadas com o fato de que o fluido próximo de paredes sólidas passa a movimentar-se com a mesma velocidade da parede, que no problema aqui proposto, assume-se que a velocidade na parede é nula.

(ii) eixo de simetria:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \text{ em } y = 0. \quad (56)$$

(iii) fluido na entrada e na saída do canal:

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y^3, & \zeta \rightarrow 3y, & \text{quando } x \rightarrow -\infty, \\ \psi \rightarrow \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y^3, & \zeta \rightarrow 3y, & \text{quando } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (57)$$

com fluxo de Poiseuille (fluxo parabólico - perfil de velocidade parabólico) tanto a montante, quanto a jusante.

### 3.4 Malha Computacional

Para discretizar as equações de Navier-Stokes na formulação função corrente, faz-se necessário transformar o domínio físico, que é contínuo, em um domínio computacional (Maliska, 1995). Para o problema proposto, assume-se uma região retangular cujo os pontos internos são uniformemente distribuídos em ambas as direções  $x$  e  $y$ . Ao conjunto desses pontos dá-se o nome de malha. A construção da malha sobre o domínio de cálculo é importantíssimo para se obter uma simulação de boa qualidade (Ferreira et al., 1998).

As equações de Navier-Stokes na formulação função corrente foram discretizadas num domínio  $nx \times ny$ , com  $nx \times ny = (32, 128)$  pontos na malha mais rústica,  $nx \times ny = (64, 256)$  na malha intermediária e  $nx \times ny = (128, 512)$  na malha mais fina.

Para uma molécula compacta  $5 \times 5$ , dados  $i$  e  $j$ , cada nó  $(i, j)$  corresponde aos pontos  $(x, y)$ ,  $(x + h, y)$ ,  $(x, y + h)$ ,  $(x - h, y)$ ,  $(x, y - h)$ ,  $(x + h, y + h)$ ,  $(x - h, y + h)$ ,  $(x - h, y - h)$ ,  $(x + h, y - h)$ ,  $(x + 2h, y)$ ,  $(x, y + 2h)$ ,  $(x - 2h, y)$ ,  $(x, y - 2h)$ ,  $(x + 2h, y + h)$ ,  $(x - 2h, y + h)$ ,  $(x - 2h, y - h)$ ,  $(x + 2h, y - h)$ ,  $(x + 2h, y + 2h)$ ,  $(x - 2h, y + 2h)$ ,  $(x - 2h, y - 2h)$ ,  $(x + 2h, y - 2h)$ ,  $(x + h, y + 2h)$ ,  $(x - h, y + 2h)$ ,  $(x - h, y + 2h)$  e  $(x + h, y - 2h)$  e são denotados, respectivamente por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 e 24, em que  $h$  é o tamanho do passo (ver Figura 8). O tamanho  $h$  dos intervalos é igual em toda a extensão da malha.

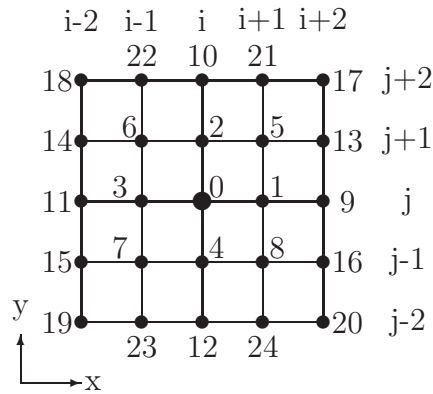


Figura 8: Molécula computacional centrada em  $(i, j)$ .

Apresenta-se a seguir os procedimentos adotados para aplicação dos métodos explicitados no capítulo 2 em uma geometria como a exibida na Figura 9.

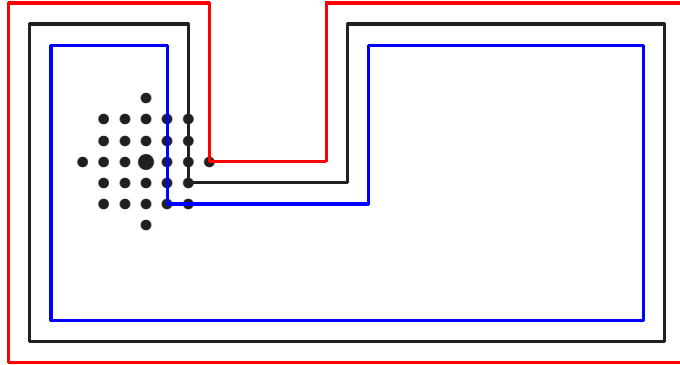


Figura 9: Molécula próxima a fronteira sólida.

- Aplica-se na primeira linha de pontos internos ao domínio computacional o método de diferença central de segunda ordem (linha azul). Por exemplo,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2h}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + O(h^2).$$

- Aplica-se o método de diferença central de quarta ordem (compacto/não compacto) nas demais linhas internas do domínio computacional.
- Para as fronteiras rígidas (linha preta) tem-se as seguintes condições:

$$\psi = 1, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (58)$$

- Para o eixo de simetria tem-se como condição  $\psi = 0$ . Verifica-se que para essa condição os pontos são simétricos. Então,  $\psi_{i,j-1} = \psi_{i,j+1}$ .
- Para o comportamento do fluido tanto na entrada quanto na saída do canal, assume-se a seguinte condição:

$$\psi = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}y^3. \quad (59)$$

- Na linha de pontos fantasmas aplica-se diferenças finitas ascendentes/descendentes de quarta ordem ou diferença central de segunda ordem (linha vermelha). Por exemplo,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{12h}(3\psi_{i,j} + 10\psi_{i,j-1} - 18\psi_{i,j-2} + 6\psi_{i,j-3} - \psi_{i,j-4}) + O(h^4).$$

A escolha pela aplicação do método de diferenças centrais de segunda ordem, na primeira linha de pontos internos ao domínio computacional - linha azul (ver Figura 9), visa reduzir a quantidade de pontos fantasmas.

Apresenta-se na Figura 10 uma molécula computacional deslocada apenas uma unidade da fronteira rígida (linha preta), ou seja, aplica-se o método de quarta ordem em todo o domínio computacional e observa-se que quando a solução procurada está próxima a fronteira rígida o método necessita de duas linhas de pontos fantasmas, representadas pelas cores vermelho e azul.

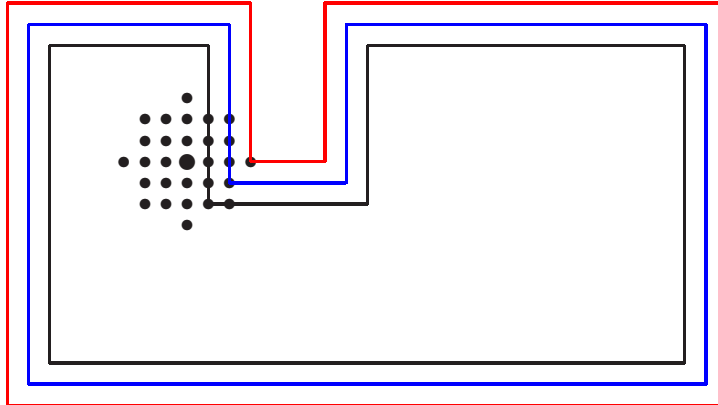


Figura 10: Molécula deslocada uma unidade da fronteira sólida.

Verifica-se que os pontos fantasmas próximos as quinas reentrantes são utilizados em mais de uma aproximação e por isso podem ser calculados através de uma média entre as aproximações para  $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$  ou pode-se utilizar diferenças finitas ascendentes/descendentes, porém essas escolhas podem vir a gerar problemas na convergência do método. Sendo assim, na tentativa de diminuir o número de linhas de pontos fantasmas deslocou-se a molécula computacional em duas unidades da fronteira (ver Figura 9), implementando assim uma combinação de métodos de diferenças centrais de segunda e quarta ordem, que será exibida no próximo capítulo.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresenta-se resultados numéricos para uma combinação de métodos de segunda ordem com métodos de quarta ordem e compara-se os resultados com os obtidos pelo método de diferença central de segunda ordem. Linhas de corrente são também apresentadas.

### 4.1 Erros RMS e Máximo para o Método Misto

As simulações envolveram dois métodos numéricos de quarta ordem (compacto e não compacto) e o método de diferença central de segunda ordem para a formulação função corrente (ver equação (23)). Obteve-se os resultados para duas malhas com diferentes tamanhos, sendo uma com  $256 \times 64$  e a outra com  $512 \times 128$ . Verificou-se que a medida que a malha computacional foi refinada, o tempo computacional aumentou, assim, não apresentou uma melhora significativa nos resultados perante ao esforço computacional exigido.

Para o problema do canal com um ressalto, tem-se uma malha uniforme, com o comprimento do canal sendo quatro, e espaçamentos  $hx = hy = 1/ny$  em ambas as direções. A geometria considerada para as simulações foram:

- antes da oclusão:  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ ;
- oclusão:  $1 \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq 0.5$ ;
- depois da oclusão:  $2 \leq x \leq 4$  e  $0 \leq y \leq 1$ .

Citou-se, anteriormente, que moléculas computacionais enormes causam algumas dificuldades quando a solução é calculada próximo a fronteira. Por

este motivo, optou-se pela combinação de métodos de segunda e quarta ordem que resulta apenas em uma linha de pontos fantasmas (ver Figura 9). Os procedimentos para aplicação dessa combinação de métodos foram exibidos na seção 3.4.

As tabelas<sup>1</sup> a seguir apresentam os erros RMS e máximo para uma combinação de métodos de quarta ordem e métodos de diferenças centrais de segunda ordem no domínio computacional. Nas Tabelas 1 e 2 os erros RMS variam de  $\sim 10^{-5}$  a  $\sim 10^{-4}$  e os erros máximo de  $\sim 10^{-4}$  a  $\sim 10^{-3}$ , respectivamente, para  $0 \leq Re \leq 500$ . Os resultados obtidos referem-se a MNC 4h, que consiste na aproximação da primeira linha de pontos internos ao domínio computacional utilizando o método de diferença central de segunda ordem, aplicação do método não compacto de quarta ordem nas demais linhas internas e na linha de pontos fantasmas aplica-se diferenças finitas ascendentes/descendentes de quarta ordem nas fronteiras rígidas. Para o método MNC 2h, mantém-se os mesmos procedimentos anteriores, exceto para o cálculo da linha de pontos fantasmas nas fronteiras rígidas que agora utiliza-se o método de diferenças centrais de segunda ordem. Já em SO utilizou-se o método de diferenças centrais de segunda ordem, tanto no domínio computacional, quanto na obtenção da solução dos pontos fantasmas das fronteiras rígidas.

Compara-se os erros dos métodos MNC 4h e MNC 2h com aqueles obtidos pelos de segunda ordem e verifica-se que o métodos MNC produziram erros menores do que os de segunda ordem.

As Tabelas 3 e 4 exibem os erros RMS e máximo, respectivamente, para uma combinação de métodos de quarta ordem com os de diferenças centrais de segunda ordem. As combinações dos métodos MC 4h e MC 2h foram obtidos através dos procedimentos já mencionados anteriormente para MNC 4h e MNC 2nd, porém alterou-se a aproximação do método não compacto pelo método compacto de quarta ordem  $5 \times 5$ . Nota-se que os erros RMS e máximo estão variando, respectivamente, entre  $\sim 10^{-5}$  e  $\sim 10^{-4}$ , e entre  $\sim 10^{-4}$  e  $\sim 10^{-3}$ . Nas tabelas o símbolo \*\* indica que o método de Newton não convergiu para a dada precisão estipulada depois de

<sup>1</sup>Em que a notação  $p(-q)$  é equivalente a  $p \times 10^{-q}$ .



10 iterações.

Também é observado nas tabelas que os erros RMS para as combinações dos métodos mistos MNC 2h e MC 2h apresentaram erros menores quando comparados com os métodos mistos MNC 4h e MC 4h. Nota-se que para todos os erros a ordem de grandeza é a mesma, porém a precisão de alta ordem, que era esperada para os métodos nominados MNC 4h e MC 4h, não foi obtida. Esse comportamento deve-se as duas quinas reentrantes (no afunilamento e na expansão do canal), aos pontos singulares e ao uso de malha uniforme. O fato é reforçado com os resultados apresentados por Hunt (1990) para o problema do degrau fazendo uso de malha não uniforme.

Para o problema estudado, verificou-se que os métodos mistos MNC apresentam erros menores quando comparados com os erros dos métodos mistos compacto MC, e isto pode ser explicado pelo fato que o método não compacto tem erro de truncamento de ordem  $O(Re h^4)$ , enquanto os erros de truncamento para o método compacto são de ordem  $O(Re^2 h^4)$ .

Tabela 1: Erros RMS para o método misto não compacto.

<b>Erros <math>\psi</math> - Métodos</b>			
$Re$	MNC 2h <sup>a</sup>	MNC 4h <sup>b</sup>	SO <sup>c</sup>
0	2.49(-5)	2.63(-5)	1.15(-4)
10	2.57(-5)	2.72(-5)	1.20(-4)
50	3.11(-5)	3.25(-5)	1.69(-4)
100	3.13(-5)	3.44(-5)	2.06(-4)
250	3.08(-5)	3.75(-5)	2.93(-4)
500	3.91(-5)	5.41(-5)	4.28(-4)

<sup>a</sup>Método não compacto e aproximações de segunda ordem na linha de pontos fantasmas.

<sup>b</sup>Método não compacto e aproximações de quarta ordem na linha de pontos fantasmas.

<sup>c</sup>Diferença central de segunda ordem.

Tabela 2: Erros máximo para o método misto não compacto.

<b>Erros <math>\psi</math> - Métodos</b>			
<i>Re</i>	MNC 2h	MNC 4h	SO
0	1.06(-4)	1.08(-4)	4.95(-4)
10	1.49(-4)	1.47(-4)	7.14(-4)
50	2.06(-4)	2.00(-4)	1.13(-3)
100	2.23(-4)	2.17(-4)	1.47(-3)
250	2.24(-4)	2.45(-4)	1.84(-3)
500	3.02(-4)	3.63(-4)	2.11(-3)

Tabela 3: Erros RMS para o método misto compacto.

<b>Erros <math>\psi</math> - Métodos</b>			
<i>Re</i>	MC 2h <sup>a</sup>	MC 4h <sup>b</sup>	SO <sup>c</sup>
0	2.48(-5)	2.62(-5)	1.15(-4)
10	2.42(-5)	2.51(-5)	1.20(-4)
50	4.46(-5)	4.58(-5)	1.69(-4)
100	7.03(-5)	7.47(-5)	2.06(-4)
250	**	**	2.93(-4)
500	**	**	4.28(-4)

<sup>a</sup>Método compacto e aproximações de segunda ordem na linha de pontos fantasmas.

<sup>b</sup>Método compacto e aproximações de quarta ordem na linha de pontos fantasmas.

<sup>c</sup>Diferença central de segunda ordem.

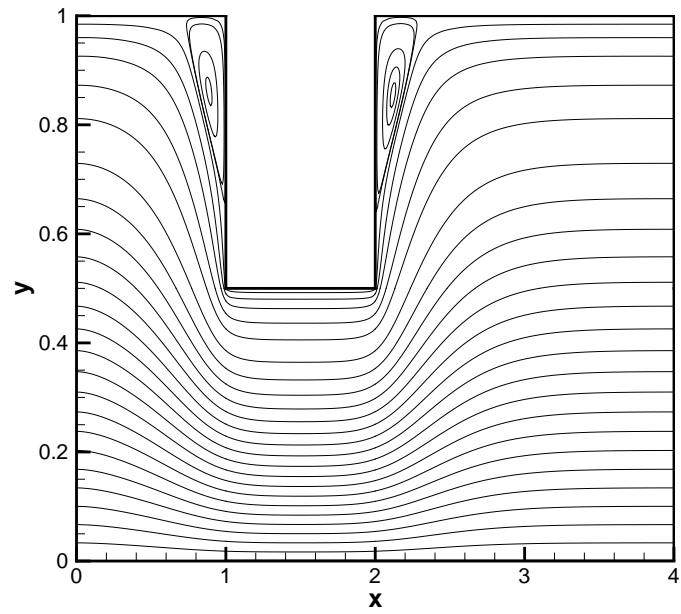
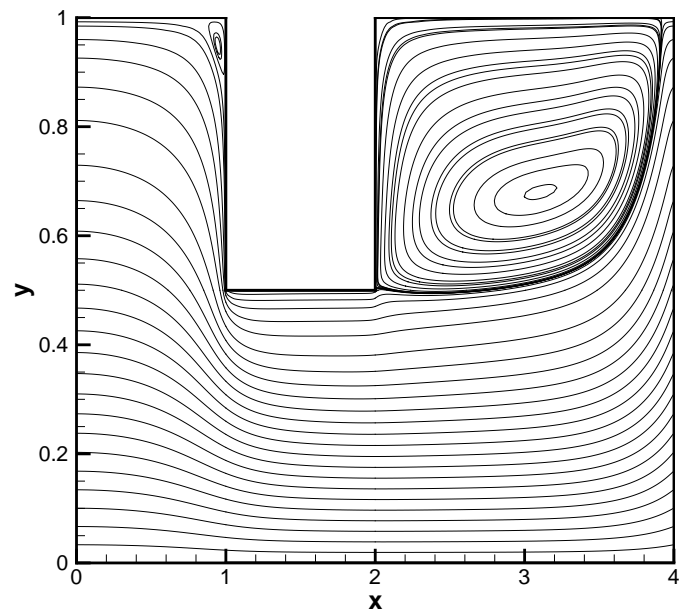
Tabela 4: Erros máximo para o método misto compacto.

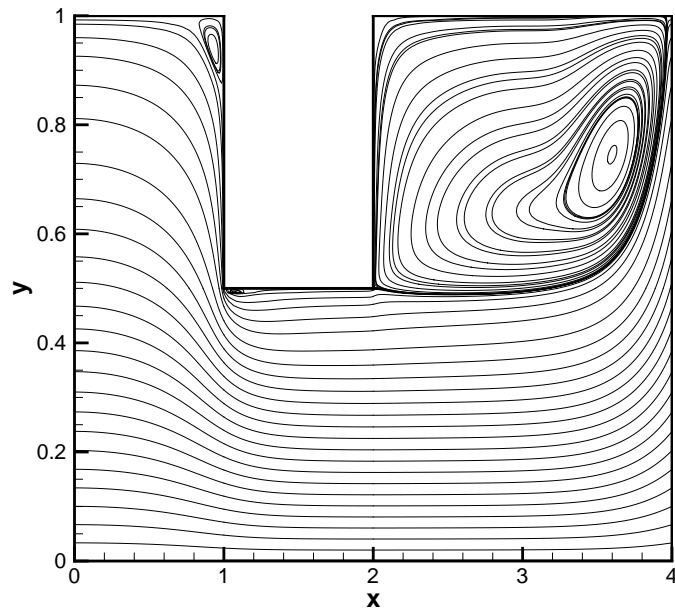
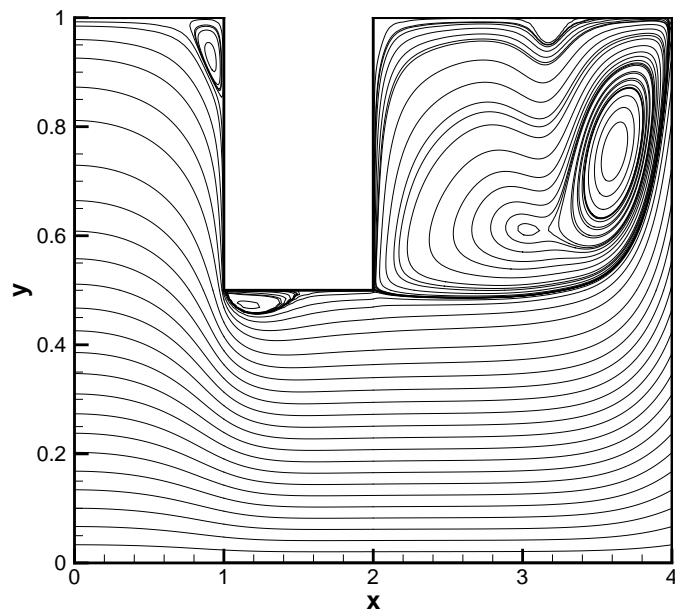
<b>Erros <math>\psi</math> - Métodos</b>			
$Re$	MC 2h	MC 4h	SO
0	1.05(-4)	1.08(-4)	4.95(-4)
10	1.51(-4)	1.49(-4)	7.14(-4)
50	2.20(-4)	2.20(-4)	1.13(-3)
100	2.65(-4)	2.66(-4)	1.47(-3)
250	**	**	1.84(-3)
500	**	**	2.11(-3)

## 4.2 Linhas de Corrente para o Método Misto

As linhas de corrente são curvas tangentes ao campo de velocidades. Quando o escoamento é estacionário as linhas de corrente não variam ao longo do tempo (Nachbin, 2001). A seguir apresenta-se algumas linhas de corrente e para a construção dessas linhas considerou-se os cálculos na malha  $512 \times 128$ . Nas Figuras (11)-(13) apresentam-se as linhas de corrente para o método MNC 2h, figuras essas semelhantes para os métodos MNC 4h, MNC 2h, MC 4h e MC 2h. Para  $Re = 500$ , os métodos mistos MC 4h e MC 2h não convergiram. A Figura 14 apresenta as linhas de corrente para o método MNC 4h.

Nota-se na Figura 11 a simetria (antes e após a oclusão) que só ocorre em  $Re = 0$ ; na Figura 12 tem-se uma recirculação mais acentuada após a oclusão; já na Figura 13 tem-se uma pequena recirculação na oclusão e após a oclusão a recirculação é bem acentuada, e na Figura 14 há duas regiões de recirculação, sendo respectivamente, uma na oclusão e outra mais intensa após a oclusão.

Figura 11: Linhas de corrente para  $Re = 0$ .Figura 12: Linhas de corrente para  $Re = 100$ .

Figura 13: Linhas de corrente para  $Re = 250$ .Figura 14: Linhas de corrente para  $Re = 500$ .

A partir do número de Reynolds é possível avaliar o tipo de escoamento (laminar ou turbulento). Em escoamentos laminares as linhas de corrente não se cruzam e o fluido se move em camadas descrevendo um perfil parabólico. Nota-se que após o afunilamento do canal o fluido enfrenta mais dificuldades e então, conclui-se que com o aumento do  $Re$  as recirculações se tornam mais intensas (ver Figuras de 11 a 14).

Estudos realizados por Botnar et al. (2000) e McKay et al. (2005) enfatizam o fato de que a forma como é disposta a geometria de um problema favorece o aparecimento das recirculações, sendo que nos estudos realizados pelos autores acreditam-se que as recirculações são devido a formação de uma placa necrótica composta de células sanguíneas mortas, que no trabalho aqui desenvolvido, são representados pela oclusão do canal.

Para  $100 \leq Re \leq 500$ , verifica-se nas Figuras (12)-(14) que o comprimento do canal é pequeno, dificultando a visualização do comportamento do fluido. Hunt (1990) considera para o problema do degrau com face para frente, uma transformação nas variáveis para obter canais mais longos e malha refinada no primeiro ponto singular, entretanto, para a equação (23) tal transformação resulta em uma expressão muito grande e de difícil manipulação algébrica. Com o intuito de auxiliar as visualizações apresenta-se na Figura 15 as linhas de corrente em que o canal foi dividido em duas partes, sendo elas, antes e depois da oclusão.

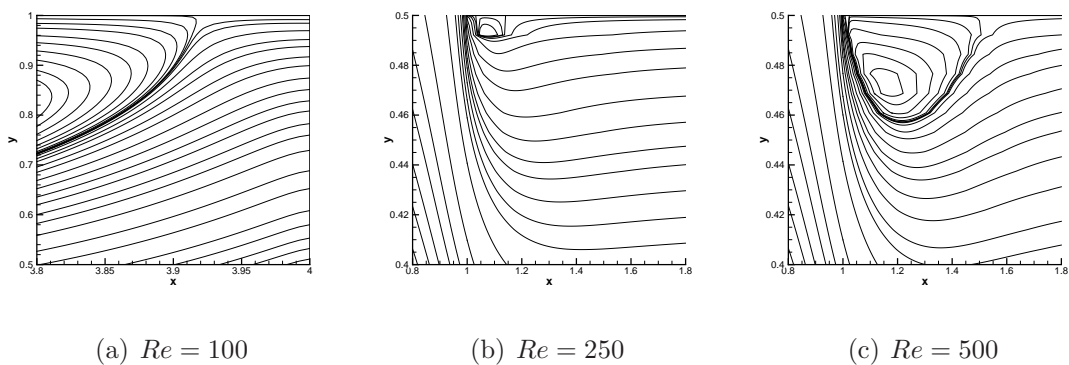


Figura 15: Linhas de corrente : após a oclusão (a); na oclusão (b) e (c).

---

Se o comprimento do canal fosse maior, ficaria fácil verificar que as linhas de corrente se tornam paralelas, devido a consideração de um problema estacionário (ver Figuras 15).

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo resolver as equações de Navier-Stokes estacionárias, bidimensionais e incompressíveis na formulação função corrente em um canal com uma oclusão local utilizando métodos de alta ordem. Sabe-se no entanto, que este trabalho é apenas uma simplificação de um modelo real e por isso não é possível fazer afirmações a respeito do escoamento sanguíneo.

Apresentou-se resultados para o problema do canal com um ressalto utilizando a combinação de métodos de quarta ordem com os métodos de segunda ordem. Escolheu-se essa combinação com o intuito de diminuir as dificuldades computacionais. Verificou-se que os erros para a combinação do método não compacto com o método de diferenças finitas ascendentes/descendentes de quarta ordem (MNC 4h) quando comparados com a combinação do método não compacto com o método de diferença central de segunda ordem (MNC 2h) não diferem em ordem de grandeza e que a esperada precisão de alta ordem para o método nominado MNC 4h, que incorpora todas as aproximações de quarta ordem, não foi obtida. Entretanto, quando compara-se os resultados de tais métodos (MNC 2h e MNC 4h) observa-se que os erros foram bem menores quando comparados com os erros do método de diferenças centrais de segunda ordem.

O comportamento dos erros exibindo a mesma ordem de grandeza para a combinação dos métodos MNC 4h e MNC 2h deve-se as duas quinas reentrantes (no afunilamento e na expansão do canal), aos pontos singulares e o uso de malha uniforme. Os resultados para o método misto compacto indicaram que o método de Newton convergiu após 10 iterações para  $Re \leq 100$ , enquanto que para método misto não compacto o método convergiu para  $Re \leq 500$ .



Conclui-se que a opção pela combinação de métodos de segunda e quarta ordem além da facilidade de implementação do método para a geometria considerada, ainda produz resultados mais precisos quando comparados com o método de segunda ordem.

## 6 PERSPECTIVAS FUTURAS

A pesquisa desenvolvida neste trabalho pode ser enriquecida nos seguintes aspectos:

- Aplicar métodos de alta ordem em uma geometria semelhante a da artéria carótida (Y);
- Estender a metodologia aplicada a problemas não estacionários a fim de acompanhar a evolução temporal do comportamento do fluido;
- Estender também a metodologia aos fluidos não newtonianos;
- Implementar modelos computacionais em três dimensões a fim de se obter mais informações sobre o comportamento do fluido. Esses modelos são mais realísticos e podem facilitar a compreensão do escoamento sanguíneo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTAS, I.; BURRAGE, K. A High Accuracy Defect-Correction Multigrid Method For the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics**, v.114, p.227–233, 1994.

ARAB-GHANBARI, M.; KHANI, M. M.; AREFMANESH, A.; TABATABAIGHOMSHE, T. Analysis of Blood Turbulent Flow in Carotid Artery Including the Effects of Mural Thrombosis Using Finite Element Modeling. **American Journal of Applied Sciences**, v.6, n.2, p.337–344, 2009.

BOTNAR, R.; RAPPITSCH, G.; SCHEIDEGGER, M. B.; LIEPSCH, D.; PERKTOLD, K.; BOESIGER, P. Hemodynamics in the Carotid Artery Bifurcation: A Comparison Between Numerical Simulations and in Vitro MRI Measurements. **Journal of Biomechanics**, v.33, p.137–144, 2000.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 736p.

CARVALHO, S. Uma Simulação Numérica do Escoamento na Artéria Carótida. Porto Alegre, 1998. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**. São Carlos: ICMC-USP, 1999. 209p.

CUNHA, M. C. C. **Métodos Numéricos**. Campinas: Unicamp, 2003. 276p.

DENNIS, S. C. R.; HUDSON, J. D. Compact  $h^4$  Finite-Difference Approximations to Operators of Navier-Stokes Type. **Journal of Computational Physics**, v.85, n.2, p.390–416, 1989.

E, W.; LIU, J. G. Essentially Compact Schemes for Unsteady Viscous Incompressible Flows. **Journal of Computational Physics**, v.126, n.1, p.122–138, 1996.

EMEDIX. Aterosclerose, 2008. [emedix.uol.com.br/doi/car005\_1f\_aterosclerose.php; acessado em 09-Junho-2009].

FERREIRA, V. G.; MELO, O. D.; FORTUNA, J. N. O. **Tópicos Teóricos e Computacionais em escoamentos de Fluidos**. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, 1998. 66p.

FERREIRA, V. G.; NAVARRO, H. A.; KAIBARA, M. K. **Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos**. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2005. 66p.

FIORAVANTE, C. Fluxo livre. **Revista Pesquisa Fapesp**, v.157, p.50–55, 2009.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Techniques for Fluid Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 2v. 493p.

FORNBERG, B. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Space Grids. **Mathematics of Computation**, v.51, n.184, p.699–706, 1988a.

FORNBERG, B. Steady Viscous Flow Past a Sphere at High Reynolds Numbers. **The Journal of Fluid Mechanics**, v.190, p.471–489, 1988b.

FORNBERG, B. A Compact Fourth Order Finite Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations. **Exxon Research and Engineering Co**, 1992.

- FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2000. 432p.
- GIJSEN, F. J. H.; VAN DE VOSSE, F. N.; JANSSEN, J. D. The Influence of the Non-Newtonian Properties of Blood on the Flow in Large Arteries: Steady Flow in a Carotid Bifurcation Model. **Journal of Biomechanics**, v.32, p.601–608, 1999.
- GODOY, M. I Consenso Nacional de Reabilitação Cardiovascular (Fase Crônica). **Arquivos Brasileiros de Cardiologia**, v.69, n.4, p.1–25, 1997.
- GUPTA, M. M. High Accuracy Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics**, v.93, n.2, p.343–359, 1991.
- GUPTA, M. M.; MANOHAR, R.; STEPHENSON, J. W. High Order Difference Schemes for Two Dimensional Elliptic Equations. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v.1, p.71–80, 1985.
- GUPTA, M. M.; MANOHAR, R. P. On the Use of Central Difference Scheme for Navier-Stokes Equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.15, n.1, p.557–573, 1980.
- GUSTAFSSON, B. **High Order Difference Methods for Time Dependent PDE**. New York: Springer, 2008. 334p.
- HENSHAW, W. D. A Fourth-Order Accurate Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Overlapping Grids. **Journal of Computational Physics**, v.113, n.1, p.13–25, 1994.
- HENSHAW, W. D.; KREISS, H. O.; REYNA, L. G. M. A Fourth-Order Accurate Difference Approximation For the Incompressible Navier-Stokes Equations. **Computers & Fluids**, v.23, n.4, p.575–593, 1994.
- HUANG, H.; MODI, V. J.; SEYMOUR, B. R. Fluid Mechanics of Stenosed Arteries. **International Journal Engineering Science**, v.33, n.6, p.815–828, 1995.

- HUNT, R. The Numerical Solution of the Laminar Flow in a Constricted Channel at Moderately High Reynolds Number Using Newton Iteration. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.11, p.247–259, 1990.
- HUNT, R. Newton's Methods for 2D Problems. Rel. téc., Department of Mathematics, University of Strathclyde, 1993.
- IBRAGIMOV, A. I.; MCNEAL, C. J.; RITTER, L. R.; WALTON, J. R. A Dynamic Model of Atherogenesis as an Inflammatory Response. **Advances in Dynamical Systems**, v.14, n.2, p.85–189, 2007.
- LELE, S. K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. **Journal of Computational Physics**, v.103, p.16–42, 1992.
- LEVEQUE, R. J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 578p.
- LI, M. Numerical Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations, 1998. Thesis(Ph.D.) - Simon Fraser University.
- LI, M.; TANG, T. A Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for Unsteady Viscous Incompressible Flows. **Journal of Scientific Computing**, v.16, n.1, p.29–45, 2001.
- LI, M.; TANG, T.; FORNBERG, B. A Compact Fourth Order Finite Difference Scheme for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.20, p.1137–1151, 1995.
- LIBBY, P. Arteriosclerose: O Novo Ponto de Vista. **Scientific American Brasil**, v.1, n.2, p.54–63, 2002.
- LOPES, A. D. Tão Jovens e tão Ameaçados. **Revista Veja**, v.42, n.27, p.130–131, 2009.

MACKAY, J.; MENSAH, G. A. **The Atlas of Heart Disease and Stroke**. Geneva: World Health Organization, 2004. 112p.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995. 424p.

MANCERA, P. F. A. Fourth Order Numerical Methods for Solving the Navier-Stokes Equations in two Dimensions. Glasgow, Scotland, 1996. Thesis(Ph.D.) - University of Strathclyde.

MANCERA, P. F. A. A Study of a Numerical Solution of the Steady two Dimensions Navier-Stokes Equations in a Constricted Channel Problem by a Compact Fourth Order Method. **Applied Mathematics and Computation**, v.146, p.771–790, 2003.

MANCERA, P. F. A. The Impact on the Accuracy in a Fourth-Order Compact Method by the Use of Different Formulae to the Vorticity. **Revista de Matemática e Estatística**, v.23, n.2, p.109–119, 2005.

MANCERA, P. F. A.; HUNT, R. Fourth-Order Method for Solving the Navier-Stokes Equations in a Constricting Channel. **Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.25, n.10, p.1119–1135, 1997.

MANCERA, P. F. A.; HUNT, R. Numerical Solution of a Constricted Stepped Channel Problem Using a Fourth Order Method. **Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics**, v.3, n.2, p.51–67, 1999.

MANCERA, P. F. A.; HUNT, R. Some Experiment with High Order Compact Methods Using a Computer Algebra Software – Part I. **Applied Mathematics and Computation**, v.174, n.1, p.775–794, 2006a.

MANCERA, P. F. A.; HUNT, R. Some Experiment with High Order Compact Methods Using a Computer Algebra Software – Part II. **Applied Mathematics and Computation**, v.180, p.233–241, 2006b.

MATSUDO, S. M.; MATSUDO, V. K. R.; BARROS NETO, T. L. Atividade Física e Envelhecimento: Aspectos Epidemiológicos. **Revista Brasileira de Medicina do Esporte**, v.7, n.1, p.1–12, 2001.

MCKAY, C.; MCKEE, S.; MOTTRAM, N.; MULHOLLAND, T.; WILSON, S. Towards a Model of Atherosclerosis, University of Strathclyde. p.1–29, 2005.

MERCER, J.; MAHMOUDI, M.; BENNETT, M. DNA Damage, P53, Apoptosis and Vascular Disease. **Mutation Research**, v.621, p.75–86, 2007.

MURRAY, C. J. L.; LOPEZ, A. D. Alternative Projections of Mortality and Disability by Cause 1990-2020: Global Burden of Disease Study. **The Lancet**, v.349, p.1498–1504, 1997.

NACHBIN, A. **Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro: IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. 110p.

NAPOLITANO, M.; PASCAZIO, G.; QUARTAPELLE, L. A Review of Vorticity Conditions in the Numerical Solution of the  $\zeta$ - $\psi$  Equations. **Computers & Fluids**, v.28, p.139–185, 1999.

PANDIT, S. K. On the Use of Compact Streamfunction-Velocity Formulation of Steady Navier-Stokes Equations on Geometries beyond Rectangular. **Journal of Scientific Computing**, v.36, n.2, p.219–242, 2008.

PANDIT, S. K.; KALITA, J. C.; DALAL, D. C. A Transient Higher Order Compact Scheme for Incompressible Viscous Flows on Geometries Beyond Rectangular. **Journal of Computational Physics**, v.225, p.1100–1124, 2007.



- PANDIT, S. K.; KALITA, J. C.; DALAL, D. C. A Fourth-Order Accurate Compact Scheme for the Solution of Steady Navier-Stokes Equations on Non-Uniform Grids. **Computers & Fluids**, v.37, n.2, p.121–134, 2008.
- PEREIRA, A. As Relações entre o Bom e o Mau. **Revista Pesquisa Fapesp**, v.109, p.44–50, 2005.
- PERKTOLD, K.; RAPPITSCH, G. Computer Simulation of Local Blood Flow and Vessel Mechanics in a Compliant Carotid Artery Bifurcation Model. **Journal of Biomechanics**, v.28, n.7, p.845–856, 1995.
- ROSS, R. Atherosclerosis—An Inflammatory Disease. **The New England Journal of Medicine**, v.340, n.2, p.115–126, 1999.
- SHAH, A.; GUO, H.; YUAN, L. A Third-Order Upwind Compact Scheme on Curvilinear Meshes For the Incompressible Navier-Stokes Equations. **Communications in Computational Physics**, v.5, p.712–729, 2009.
- SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estrutura**. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 578p.
- SPOTZ, W. F. Accuracy and Performance of Numerical Wall Boundary Conditions for Steady, 2D, Incompressible Stream-Function Vorticity. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.28, n.4, p.737–757, 1998.
- SPOTZ, W. F.; CAREY, G. F. High Order Compact Scheme for Steady Stream-Function Vorticity Equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, n.1, p.3497–3512, 1995.
- SPOTZ, W. F.; CAREY, G. F. Extension of High Order Compact Schemes to Time Dependent Problems. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v.17, n.6, p.657–672, 2001.
- UOL BOA SAÚDE. Previnindo as Doenças Cardiovasculares, 2002. [boa-saude.uol.com.br/lib/ShowDoc.cfm?LibDocID=4117; acessado em 08-Junho-2009].

---

WITTKOPF, A. High Order Wide and Compact Schemes for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations. Canadá, 1994. Thesis (M.Sc.) - Simon Fraser University.

WORLD HEALTH ORGANIZATION. **Integrated Management of Cardiovascular Risk: Report of a WHO Meeting**. Noncommunicable Diseases and Mental Health, Geneva: World Health Organization, 2002. 35p.

## APÊNDICE

### I DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para ilustrar a discretização referida na equação (37), apresenta-se a seguir o processo de discretização das equações governantes e suas respectivas condições de fronteira. Na Figura 16 tem-se a geometria do canal com uma oclusão e suas respectivas medidas, com  $i$  variando no eixo  $x$  e  $j$  variando no eixo  $y$ .

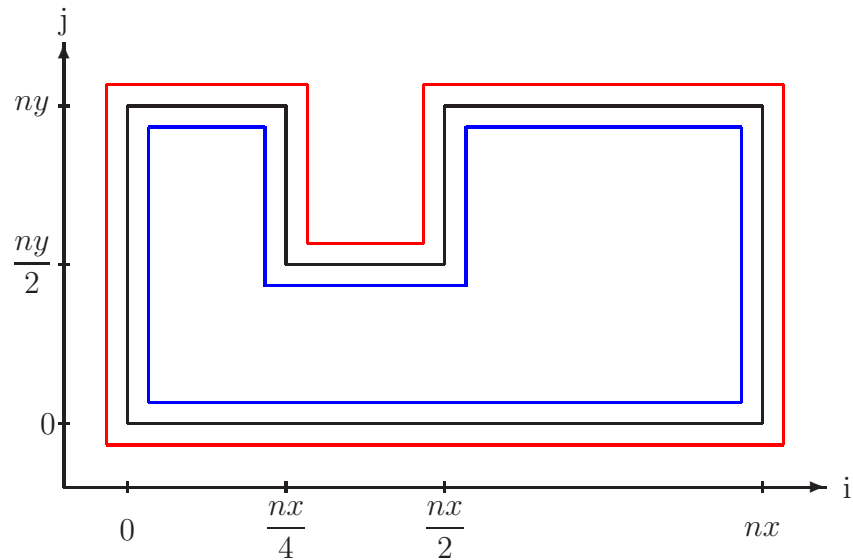


Figura 16: Dimensão do canal.

## I.1 Discretização – Método Compacto $5 \times 5$

Seja  $\psi$  uma função de duas variáveis reais. A seguir, apresenta-se as condições de fronteira utilizadas para a aplicação de um método compacto no domínio computacional do canal com uma oclusão. O processo é dado por:

- Se: ((( $1 < i < (nx/4) - 1$ ) e ( $1 < j < ny - 1$ )) ou ((( $(nx/4) - 1 \leq i \leq (nx/2) + 1$ ) e ( $1 < j < (ny/2) - 1$ )) ou ((( $(nx/2) + 1 < i < nx - 1$ ) e ( $1 < j < ny - 1$ ))), então

————— aproximações de segunda ordem —————

$$\frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6} = \frac{1}{h^6} (\psi_{i-3,j} - 6\psi_{i-2,j} + 15\psi_{i-1,j} - 20\psi_{i,j} + 15\psi_{i+1,j} - 6\psi_{i+2,j} + \psi_{i+3,j}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^4 \partial y^2} &= \frac{1}{h^6} (\psi_{i-2,j+1} - 2\psi_{i-2,j} + \psi_{i-2,j-1} - 4\psi_{i-1,j+1} + 8\psi_{i-1,j} - 4\psi_{i-1,j-1} \\ &+ 6\psi_{i,j+1} - 12\psi_{i,j} + 6\psi_{i,j-1} - 4\psi_{i+1,j+1} + 8\psi_{i+1,j} - 4\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+2,j+1} \\ &- 2\psi_{i+2,j} + \psi_{i+2,j-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^2 \partial y^4} &= \frac{1}{h^6} (\psi_{i+1,j-2} - 2\psi_{i,j-2} + \psi_{i-1,j-2} - 4\psi_{i+1,j-1} + 8\psi_{i,j-1} - 4\psi_{i-1,j-1} \\ &+ 6\psi_{i+1,j} - 12\psi_{i,j} + 6\psi_{i-1,j} - 4\psi_{i+1,j+1} + 8\psi_{i,j+1} - 4\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j+2} \\ &- 2\psi_{i,j+2} + \psi_{i-1,j+2}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{12h} (\psi_{i-2,j} - 8\psi_{i-1,j} + 8\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^4 \partial y} &= \frac{1}{2h^5} (\psi_{i-2,j+1} - \psi_{i-2,j-1} - 4(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) + 6(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \\ &- 4(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) + \psi_{i+2,j+1} - \psi_{i+2,j-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} &= \frac{1}{2h^5} (-\psi_{i+1,j-2} + 2\psi_{i,j-2} - \psi_{i-1,j-2} + 2\psi_{i+1,j-1} - 4\psi_{i,j-1} + 2\psi_{i-1,j-1} \\ &\quad - 2\psi_{i+1,j+1} + 4\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j+2} - 2\psi_{i,j+2} + \psi_{i-1,j+2}), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{12h^2} (-\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}), \\ \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} &= \frac{1}{4h^4} (-\psi_{i-2,j+1,1} + \psi_{i-2,j-1} + 2\psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i-1,j-1} - 2\psi_{i+1,j+1} \\ &\quad + 2\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+2,j+1} - \psi_{i+2,j-1,1}), \\ \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} &= \frac{1}{4h^4} (-\psi_{i+1,j-2} + \psi_{i-1,j-2} + 2\psi_{i+1,j-1} - 2\psi_{i-1,j-1} - 2\psi_{i+1,j+1} \\ &\quad + 2\psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j+2} - \psi_{i-1,j+2}), \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} &= \frac{1}{2h^3} (-\psi_{i-2,j} + 2\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}), \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{1}{2h^3} (-\psi_{i,j-2} + 2\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}), \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{1}{12h} (\psi_{i,j-2} - 8\psi_{i,j-1} + 8\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}), \\ \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} &= \frac{1}{2h^5} (-\psi_{i-3,j} + 4\psi_{i-2,j} - 5\psi_{i-1,j} + 5\psi_{i+1,j} - 4\psi_{i+2,j} + \psi_{i+3,j}), \\ \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} &= \frac{1}{2h^5} (-\psi_{i-2,j+1} + 2\psi_{i-2,j} - \psi_{i-2,j-1} + 2\psi_{i-1,j+1} - 4\psi_{i-1,j} + 2\psi_{i-1,j-1} \\ &\quad - 2\psi_{i+1,j+1} + 4\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+2,j+1} - 2\psi_{i+2,j} + \psi_{i+2,j-1}), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{144h^2} (\psi_{i-2,j-2,1} - 8\psi_{i-1,j-2} + 8\psi_{i+1,j-2} - \psi_{i+2,j-2} - 8(\psi_{i-2,j-1} \\ &\quad - 8\psi_{i-1,j-1} + 8\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i+2,j-1}) + 8(\psi_{i-2,j+1} - 8\psi_{i-1,j+1} + 8\psi_{i+1,j+1} \\ &\quad - \psi_{i+2,j+2}) - (\psi_{i-2,j+2} - 8\psi_{i-1,j+2} + 8\psi_{i+1,j+2} - \psi_{i+2,j+2})), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(\psi_{i-2,j} - 4\psi_{i-1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{h^4}(\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + 4\psi_{i,j} - 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} \\ &\quad - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j-1}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{2h^3}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - 2\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{2h^3}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}),$$

$$\frac{\partial^6 \psi}{\partial y^6} = \frac{1}{h^6}(\psi_{i,j-3} - 6\psi_{i,j-2} + 15\psi_{i,j-1} - 20\psi_{i,j} + 15\psi_{i,j+1} - 6\psi_{i,j+2} + \psi_{i,j+3}),$$

$$\frac{\partial^5 \psi}{\partial y^5} = \frac{1}{2h^5}(-\psi_{i,j-3} + 4\psi_{i,j-2} - 5\psi_{i,j-1} + 5\psi_{i,j+1} - 4\psi_{i,j+2} + \psi_{i,j+3}),$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4}(\psi_{i,j-2} - 4\psi_{i,j-1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} &= \frac{1}{2h^5}(-\psi_{i-1,j-2} + \psi_{i+1,j-2} - 4(-\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j-1}) + 6(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \\ &\quad - 4(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) + \psi_{i+1,j+2} - \psi_{i-1,j+2}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{12h^2}(-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}),$$

————— aproximações de quarta ordem —————

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} &= \frac{1}{6h^4}(-\psi_{i-3,j} + 12\psi_{i-2,j} - 39\psi_{i-1,j} + 56\psi_{i,j} - 39\psi_{i+1,j} + 12\psi_{i+2,j} \\ &\quad - \psi_{i+3,j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} &= \frac{1}{6h^4}(-\psi_{i,j-3} + 12\psi_{i,j-2} - 39\psi_{i,j-1} + 56\psi_{i,j} - 39\psi_{i,j+1} + 12\psi_{i,j+2} \\ &- \psi_{i,j+3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{144h^4}(-(-\psi_{i-2,j-2} + 16\psi_{i-1,j-2} - 30\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i+1,j-2} - \psi_{i+2,j-2}) \\ &+ 16(-\psi_{i-2,j-1} + 16\psi_{i-1,j-1} - 30\psi_{i,j-1} + 16\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i+2,j-1}) \\ &- 30(-\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}) + 16(-\psi_{i-2,j+1} \\ &+ 16\psi_{i-1,j+1} - 30\psi_{i,j+1} + 16\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+2,j+1}) - (-\psi_{i-2,j+2} + 16\psi_{i-1,j+2} \\ &- 30\psi_{i,j+2} + 16\psi_{i+1,j+2} - \psi_{i+2,j+2})),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{12h}(\psi_{i-2,j} - 8\psi_{i-1,j} + 8\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{1}{144h^3}(-(\psi_{i-2,j-2} - 8\psi_{i-2,j-1} + 8\psi_{i-2,j+1} - \psi_{i-2,j+2}) + 16(\psi_{i-1,j-2} \\ &- 8\psi_{i-1,j-1} + 8\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j+2}) - 30(\psi_{i,j-2} - 8\psi_{i,j-1} + 8\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}) \\ &+ 16(\psi_{i+1,j-2} - 8\psi_{i+1,j-1} + 8\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j+2}) - (\psi_{i+2,j-2} - 8\psi_{i+2,j-1} \\ &+ 8\psi_{i+2,j+1} - \psi_{i+2,j+2})),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{1}{8h^3}(\psi_{i,j-3} - 8\psi_{i,j-2} + 13\psi_{i,j-1} - 13\psi_{i,j+1} + 8\psi_{i,j+2} - \psi_{i,j+3}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{12h}(\psi_{i,j-2} - 8\psi_{i,j-1} + 8\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{1}{8h^3}(\psi_{i-3,j} - 8\psi_{i-2,j} + 13\psi_{i-1,j} - 13\psi_{i+1,j} + 8\psi_{i+2,j} - \psi_{i+3,j}),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} &= \frac{1}{144h^3}(-(\psi_{i-2,j-2} - 8\psi_{i-1,j-2} + 8\psi_{i+1,j-2} - \psi_{i+2,j-2}) + 16(\psi_{i-2,j-1} \\ &- 8\psi_{i-1,j-1} + 8\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i+2,j-1}) - 30(\psi_{i-2,j} - 8\psi_{i-1,j} + 8\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}) \\ &+ 16(\psi_{i-2,j+1} - 8\psi_{i-1,j+1} + 8\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+2,j+1}) - (\psi_{i-2,j+2} - 8\psi_{i-1,j+2} \\ &+ 8\psi_{i+1,j+2} - \psi_{i+2,j+2})),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NS_4 &= \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x y^2} \right) \right), \\
 NS_{xx} &= \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6} + 2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^2 \partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^4 \partial y} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \right. \\
 &\quad + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right), \\
 NS_{yy} &= \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^4 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \psi}{\partial y^6} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y^5} \right) \right. \\
 &\quad + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} \right) - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \Big), \\
 DX &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\
 NS_y &= \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^4 \partial y} + 2 \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y^5} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right), \\
 DY &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\
 NS_x &= \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^5} + 2 \frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right), \\
 eqn &= NS_4 + h^2((NS_{xx} + NS_{yy})/6 + Re(DXNS_y - DYN S_x)/12). \tag{60}
 \end{aligned}$$

A equação (60) elimina os pontos cardeais resultando em uma método compacto. Essa equação é igual a equação (36) exibida na seção 2.3.3.



A seguir, tem-se aproximações de segunda ordem para as condições de fronteira representadas pelo contorno de cor azul (ver Figura 16):

- Senão se:  $((j = ny - 1) \text{ e } ((0 < i < nx/4) \text{ ou } (nx/2 < i < nx)) \text{ ou } (j = (ny/2) - 1 \text{ e } ((nx/4) - 1 \leq i \leq (nx/2) + 1)) \text{ ou } ((j = 1) \text{ e } (0 < i < nx)) \text{ ou } (((ny/2) - 1 < j < ny - 1) \text{ e } ((i = (nx/4) - 1) \text{ ou } (i = (nx/2) + 1))) \text{ ou } ((1 < j < ny - 1) \text{ e } ((i = 1) \text{ ou } (i = nx - 1))))$ , então

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{h^4}(\psi_{i-2,j} - 4\psi_{i-1,j} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{h^4}(\psi_{i-1,j-1} - 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i,j-1} + 4\psi_{i,j} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i+1,j-1} \\ &- 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{1}{h^4}(\psi_{i,j-2} - 4\psi_{i,j-1} + 6\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2h}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{1}{2h^3}(-\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + 2\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{1}{2h^3}(-\psi_{i,j-2} + 2\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2h}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{1}{2h^3}(-\psi_{i-2,j} + 2\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}),$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{2h^3}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}),$$

$$eqn = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right). \quad (61)$$

Agora apresenta-se as condições de fronteira para as paredes rígidas que correspondem a linha preta na Figura 16:

- Senão se:  $((j = ny) \text{ e } ((0 \leq i \leq nx/4) \text{ ou } (nx/2 \leq i \leq nx)) \text{ ou } ((j = ny/2) \text{ e } (nx/4 < i < nx/2))) \text{ ou } ((ny/2 \leq j < ny) \text{ e } (i = nx/4) \text{ ou } (i = nx/2)))$  , então

$$eqn = \psi_{i,j} - 1.$$

- Senão se:  $(0 < j < ny) \text{ e } (i = 0 \text{ ou } i = nx)$  , então

$$eqn = \psi_{i,j} - (jh/2)(3 - (jh^2)).$$

- Senão se:  $(j = 0) \text{ e } (0 \leq i \leq nx)$  , então

$$eqn = \psi_{i,j}.$$

Finalizando, tem-se as condições de fronteira para a linha de pontos fantasmas que estão ilustradas pela cor vermelha na Figura 16. Apresenta-se as condições de fronteiras utilizadas que podem ser de segunda ordem ou quarta ordem, logo:

- Senão se:  $(j = ny + 1) \text{ e } (0 < i < nx/4 \text{ ou } nx/2 < i < nx)$  , então

– Segunda ordem

$$eqn = \psi_{i,ny+1} - \psi_{i,ny-1}.$$

– Quarta Ordem

$$eqn = (3\psi_{i,j} + 10\psi_{i,j-1} - 18\psi_{i,j-2} + 6\psi_{i,j-3} - \psi_{i,j-4})/(12h).$$

- Senão se:  $(j = (ny/2) + 1) \text{ e } ((nx/4) + 1 < i < (nx/2) - 1)$  , então

– Segunda ordem

$$eqn = (\psi_{(ny/2)+1,j} - \psi_{(ny/2)-1,j}).$$

– Quarta Ordem

$$eqn = (3\psi_{i,j} + 10\psi_{i,j-1} - 18\psi_{i,j-2} + 6\psi_{i,j-3} - \psi_{i,j-4})/(12h).$$

- Senão se:  $(i = -1)$  e  $(0 < j < ny)$  , então

$$eqn = \psi_{-1,j} - \psi_{0,j}.$$

- Senão se:  $(i = nx + 1)$  e  $(0 < j < ny)$  , então

$$eqn = \psi_{nx+1,j} - \psi_{nx,j}.$$

- Senão se:  $(j = -1)$  e  $(0 < i < ny)$  , então

$$eqn = \psi_{i,1} + \psi_{i,-1}.$$

- Senão se:  $(i = (nx/4) + 1)$  e  $((ny/2) + 1 < j < ny)$  , então

– Segunda ordem

$$eqn = (\psi_{(nx/4)+1,j} - \psi_{(nx/4)-1,j}).$$

– Quarta Ordem

$$eqn = (3\psi_{i,j} + 10\psi_{i-1,j} - 18\psi_{i-2,j} + 6\psi_{i-3,j} - \psi_{i-4,j})/(12h).$$

- Senão se:  $(i = (nx/2) - 1)$  e  $((ny/2) + 1 < j < ny)$  , então

– Segunda ordem

$$eqn = (\psi_{(nx/2)+1,j} - \psi_{(nx/2)-1,j}).$$

– Quarta ordem

$$eqn = (3\psi_{i,j} + 10\psi_{i+1,j} - 18\psi_{i+2,j} + 6\psi_{i+3,j} - \psi_{i+4,j})/(12h).$$

- Senão se:  $(j = (ny/2) + 1)$  e  $(i = (nx/4) + 1$  ou  $i = (nx/2) - 1)$  , então

$$eqn = \psi_{i,j} - \psi_{i,j-2}.$$

- Senão

$$eqn = \psi_{i,j}.$$