ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE PARA DADOS GRUPADOS E CENSURADOS

José Nilton da Cruz

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro – 2012

ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE PARA DADOS GRUPADOS E CENSURADOS

José Nilton da Cruz

Orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dra. **Liciana Vaz de Arruda Silveira**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro – 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO DE AQUIS. E TRAT. DA INFORMAÇÃO
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CAMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: *ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE*

Cruz, José Nilton da.
Algumas distribuições de probabilidade para dados grupados e censurados / José Nilton da Cruz. – Botucatu : [s.n.], 2012

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu
Orientador: Liciana Vaz de Arruda Silveira
Capes: 90194000

1. Estatística. 2. Sistemas de parâmetros distribuídos. 3. Análise de regressão.

Palavras-chave: Censura intervalar; Função de verossimilhança; Log-Weibull Exponenciada; Log-Burr XII; Weibull Generalizada.

“ Os grandes nos parecem muito grandes
porque nós os observamos de joelhos.”

Dedicatória

Aos meus pais,
José da Cruz Sobrinho *e* **Zildete Lopes da Cruz**,
que sempre batalharam para esta minha conquista.
Aos meus **irmãos**, *pelo carinho e pelo apoio.*
À Profa. Dra. **Liciana Vaz de Arruda Silveira**,
a orientação, a paciência e a amizade tudo com enorme
contribuição para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Raimundo, pelo auxílio computacional, sugestões e amizade.

À toda a minha família, em especial aos meus pais, irmãos, cunhados(as) e sobrinhos que de alguma forma contribuem para que eu possa proseguir com meus objetivos nos estudos.

À todos os meus amigos, em especial Paulo Roberto Isler e Antônio Márcio Fernandes da Rocha, pelo incentivo, apoio e principalmente pela amizade verdadeira.

Ao professor Dr.Vanderlei Marcos de Nascimento, pela orientação durante a graduação, pelos ensinamentos, amizade, incentivo e apoio para que pudesse chegar até aqui.

À minha amiga Susi, bibliotecária da Unesp-Rio Claro, pelo carinho, confiança e amizade.

À todos os professores do departamento de Bioestatística do Instituto de Biociências da UNESP, BOTUCATU-SP, pela disponibilidade e amizade.

Aos funcionários do departamento de Bioestatística do Instituto de Biociências da UNESP, BOTUCATU-SP, pelo auxílio contínuo.

Aos meus amigos do curso de mestrado em Biometria, pelo convívio, amizade e momentos de diversão.

À Capes, pelo apoio financeiro concedido.

À Deus, simplesmente por tudo, família, saúde, amigos e por me conduzir em mais uma conquista.

Sumário

Página

LISTA DE FIGURAS **vii**

LISTA DE TABELAS **ix**

RESUMO **x**

SUMMARY **xii**

1 INTRODUÇÃO **1**

2 MOTIVAÇÃO **3**

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS **4**

3.1 Análise de Sobrevivência 4

3.2 Distribuição Log-Normal Generalizada (LNG) 7

3.3 Distribuição Weibull Generalizada (WG) 9

3.4 Distribuição Log-Weibull Exponenciada (LWE) 14

3.5 Distribuição Burr XII 18

3.6 Função de Verossimilhança 21

3.7 Critério de Informação de Akaike Corrigido 24

3.8 Estimador de Turnbull 26

4 MATERIAL E MÉTODOS **28**

4.1 Modelos de Regressão para dados grupados e censurados 28

4.2 Dados 29

4.2.1 Dados de megacolo chagásico 29

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES **31**

6 PERSPECTIVAS FUTURAS **36**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **37**

APÊNDICES **41**

Lista de Figuras

Página

1 Função densidade de probabilidade da distribuição LNG considerando (a) $\mu = 2$, $\sigma = 1$ e $\lambda > 0$ e (b) $\mu = -6$, $\sigma = 1$ e $\lambda < 0$. 8

2 Função densidade de probabilidade considerando (a) $\lambda = 0$ e função de risco considerando (b) $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ da distribuição LNG 9

3 Função densidade de probabilidade (a) e função de risco (b) da distribuição de Weibull. 11

4 Função de taxa de falha da distribuição WG (a) monótona crescente e (b) monótona decrescente. 13

5 Função de taxa de falha da distribuição WG (a) unimodal e (b) banheira. 13

6 Função de taxa de falha (a) constante e (b) função densidade de probabilidade da distribuição WG. 14

7 Função de taxa de falha da distribuição WE (a) monótona crescente e (b) monótona decrescente. 15

8 Função de taxa de falha da distribuição WE (a) unimodal e (b) em forma de banheira. 15

9 Gráfico da função de densidade da distribuição WE. 16

10 Função de risco da distribuição LWE. 17

11 Função de taxa de falha da distribuição Burr XII (a) decrescente e (b) unimodal. 19

12 Função de taxa de falha quase constante (a) e função de densidade (b) da distribuição Burr XII. 19

13 Função de risco (a) e função de densidade (b) da distribuição Log-Burr XII. 21
14 Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo WG (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados). 34
15 Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo LWE (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados). 34
16 Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo Log-Burr XII (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados). 35

Lista de Tabelas

Página

1 Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Weibull Generalizada para os dados de megacolo chagásico. 32

2 Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Log-Weibull Exponenciada para os dados de megacolo chagásico. 32

3 Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Log-Burr XII para os dados de megacolo chagásico. 33

4 Valores do AIC_C para os modelos Weibull Exponenciada, Lognormal Generalizada, Weibull Generalizada, Log-Weibull Exponenciada e Log-Burr XII ajustados aos dados de megacolo chagásico. 35

ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE PARA DADOS GRUPADOS E CENSURADOS

Autor: JOSÉ NILTON DA CRUZ
Orientadora: Profª. Dra. LICIANA VAZ DE ARRUDA SILVEIRA

RESUMO

São comuns experimentos conduzidos de forma a não permitir a observação do tempo exato de ocorrência do evento (por exemplo, morte), e sim o intervalo em que este ocorreu, caracterizando assim, respostas com censura intervalar. Quando os indivíduos são avaliados nos mesmos tempos, tem-se um caso particular de censura intervalar, sendo os dados deste tipo conhecidos como grupados e censurados.

Dados grupados podem apresentar um grande número de empates, ou seja, proporção de empate maior que 25% (Chalita et al., 2002), podendo ser analisados considerando-se o tempo discreto e ajustando-se modelos à probabilidade de o indivíduo falhar em um certo intervalo, dado que ele sobreviveu ao intervalo anterior (Lawless, 1982).

O objetivo deste trabalho é propor modelos de sobrevivência para dados grupados e censurados baseado nas distribuições Weibull Generalizada (Mudhol-

kar et al., 1996), Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010) e Log-Burr XII (Silva, 2008). Posteriormente, estes modelos e os modelos Log-Normal Generalizada e Weibull Exponenciada extendidos para dados grupados e censurados por Silveira et al. (2010), serão aplicados à um conjunto de dados referente a um estudo de pacientes submetidos a cirurgia de Duhamel-Haddad (em que os modelos Log-Normal Generalizada e Weibull Exponenciada já foram ajustados em Silveira et al. (2010)), e comparados pelo critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C).

Palavras-chave: censura intervalar, função de verossimilhança, Weibull Generalizada , Log-Weibull Exponenciada, Log-Burr XII.

DISTRIBUTIONS OF PROBABILITIES FOR GROUPED AND CENSORED DATA.

Author: JOSÉ NILTON DA CRUZ

Adviser: Prof$^{\underline{a}}$. Dra. LICIANA VAZ DE ARRUDA SILVEIRA

SUMMARY

Experiments which are unable to accurately indicate the time of their occurrence are frequent (death, for instance) only the time they occur is related, which means answers with interval- censored . When individuals are assessed at the same time, there is a particular case interval-censored, and the data in this case is known as grouped and censored.

Data of this kind can have a large number of ties whose proportions are greater than 25% (Chalita et al., 2002), and can be analyzed considering the discrete time and fitting models to the probability of the individual's eventual failure and the timing of the failure, as he survived the previous interval (Lawless, 1982). The aim of this paper is to propose survival models data grouped based on Generalized Weibull distributions (Mudholkar et al., 1996), Log-Exponentiated Weibull (Hashimoto et al., 2010) and Log-Burr XII (Silva, 2008).

These models, the Generalized Lognormal and Weibull Exponential models extended to grouped data and censored by Silveira et al. (2010), will be applied to a data set concerning a study of patients undergoing Duhamel-Haddad surgery (whose Generalized Lognormal and Weibull Exponential models have been adjusted in Silveira et al. (2010), and compared by the Fixed Akaike information criterion (AICc).

Keywords: *interval-censored, likelihood function, Generalized Weibull, Exponentiated Log-Weibull, Log-Burr XII.*

1 INTRODUÇÃO

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais cresceu nas últimas duas décadas do século passado. Este crescimento se deve ao desenvolvimento de técnicas estatísticas concomitantemente com a disponibilidade de computadores cada vez mais velozes. Uma evidência quantitativa deste sucesso é o número de aplicações em várias áreas, tais como medicina, biologia, saúde pública, engenharia, criminalista, dentre outras.

Em análise de sobrevivência, a variável resposta é, geralmente, o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Este tempo é chamado de tempo de falha, podendo ser o tempo até a morte do paciente, bem como até a cura ou recidiva da doença, dentre outros.

A principal característica de dados de sobrevivência é a presença de censura, que é a observação parcial da resposta. Isto se refere a situações em que, por alguma razão, o acompanhamento do paciente foi interrompido, seja porque o paciente mudou de cidade, o estudo terminou para análise dos dados ou, o paciente morreu de causa diferente da estudada. Isto significa que toda informação referente à resposta se resume ao conhecimento de que o tempo de falha é superior àquele observado. Sem a presença de censura, as técnicas estatísticas clássicas, como análise de regressão ou análise de variância, poderiam ser utilizadas na análise deste tipo de dados, provavelmente usando uma transformação para a variável resposta.

Em dados de sobrevida com censura intervalar, o momento exato da ocorrência do evento de interesse não é observado, mas é somente conhecido o intervalo de tempo de ocorrência. Dados deste tipo aparecem com muita frequência, podendo apresentar um grande número de empates, ou seja, proporção maior que

25% (Chalita et al., 2002), sendo conhecidos como grupados e censurados.

Para modelar dados com censura intervalar, modelos mais complexos, ou seja, derivados das distribuições padrões (por exemplo, normal, weibull) têm sido utilizados. Como exemplos mais recentes, tem-se o modelo Lognormal Generalizado (Silveira et al., 2010) e Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010).

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é propor e comparar pelo Critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C) modelos de sobrevivência para dados grupados e censurados baseados nas distribuições Lognormal Generalizada (Silveira et al., 2010), Weibull Generalizada (Mudholkar et al., 1996), Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010) e Log-Burr XII (Silva, 2008).

2 MOTIVAÇÃO

O teste escore proposto por Colosimo et al. (2000) foi usado por Silveira et al. (2010) para discriminar entre os modelos de Cox e Logístico para os dados de megacolo chagásico (Almeida, 1996). Os resultados do teste indicaram que estes modelos não se ajustam bem a este conjunto de dados. Como estes dois modelos foram rejeitados, Silveira et al. (2010) consideraram os modelos para dados grupados e censurados com base nas distribuições Weibull Exponenciada (Mudholkar et al., 1995) e Log-Normal Generalizada (Chen, 1995).

Em algumas situações os modelos descritos acima podem não ser adequados. Dessa forma, o objetivo do presente trabalho é propor modelos alternativos para dados de sobrevida discretos, baseados nas distribuições Weibull Generalizada (Mudholkar et al., 1996), Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010) e Log-Burr XII (Silva, 2008) e uma vez ajustados aos dados de megacolo chagásico compará-los pelo Critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C).

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Análise de Sobrevivência

Análise de sobrevivência é uma coleção de procedimentos estatísticos que permite analisar dados em que a variável de interesse (variável resposta) é o tempo até a ocorrência de um determinado evento. Este tempo é denominado tempo de falha, entendendo por falha a ocorrência de um evento pré-estabelecido.

O termo análise de sobrevivência refere-se basicamente a situações médicas envolvendo dados censurados. Entretanto, condições similares ocorrem em outras áreas em que se usam as mesmas técnicas de análise de dados (Colosimo & Giolo, 2006). Em engenharia, são comuns os estudos em que produtos ou componentes são colocados sob teste para se estimar características relacionadas aos seus tempos de vida, tais como o tempo médio ou a probabilidade de um certo produto durar mais do que 5 anos. Os engenheiros denominam esta área de confiabilidade. Criminalistas estudam o tempo entre a liberação de presos e a ocorrência de crimes; demógrafos utilizam a análise de sobrevivência onde o evento de interesse pode ser o nascimento ou a morte de um indivíduo, duração do casamento, tempo até o divórcio, dentre outros.

Uma característica importante, em dados de sobrevivência, é a ocorrência de observações parciais da resposta. Estas observações denominadas censura, se referem a situações em que, por diversas razões, o acompanhamento do paciente é interrompido. Desta variedade, podemos destacar: término do estudo antes de se observar o evento de interesse; morte do paciente por uma causa diferente da estudada; o paciente pode ter abandonado o tratamento; não adaptação do

indivíduo ao tratamento, dentre outros.

Ressalta-se o fato de que, mesmo censurados, todas as informações provenientes do estudo de sobrevivência devem ser usados na análise estatística. Duas razões justificam tal procedimento: (i) mesmo sendo incompletas, as observações censuradas fornecem informações sobre o tempo de vida de pacientes; (ii) a omissão das censuras no cálculo das estatísticas de interesse pode acarretar conclusões viciadas (Colosimo & Giolo, 2006).

Em análise de sobrevivência, os conjuntos de dados são formados pelos tempos de sobrevivência, pelas censuras, e na grande maioria, pelas covariáveis.

As censuras podem ser:

- à direita, se o tempo de ocorrência do evento de interesse está à direita do tempo registrado, e podem ser classificadas como: censura do tipo I, aquela em que o estudo será terminado após um período pré-estabelecido de tempo; censura do tipo II, aquela em que o estudo será terminado após ter ocorrido o evento de interesse em um número pré-estabelecido de indivíduos e censura aleatória, aquela em que o indivíduo sai do estudo sem ter ocorrido a falha, ou também, se o paciente morrer por uma razão diferente da estudada.

- à esquerda, se o tempo registrado é maior que o tempo de falha, ou seja, o evento de interesse já aconteceu quando o indivíduo foi observado. Este tipo de censura, pode ser exemplificado por um estudo feito para determinar a idade em que as crianças aprendem a ler em uma determinada comunidade. Quando os pesquisadores começaram a pesquisa algumas crianças já sabiam ler e não lembravam com que idade isto tinha acontecido, caracterizando, desta forma, observações censuradas à esquerda (Colosimo & Giolo, 2006).

- censura intervalar, que pode ser considerada como um caso mais geral de censura, acontece quando por algum motivo não foi possível observar o tempo "exato" de falha, mas sim a ocorrência em um certo intervalo de tempo. Pelo fato do tempo de falha T não ser conhecido exatamente, tem-se que $T \in (L, U]$,

e assim os dados deste tipo são usualmente denominados *dados de censura intervalar*. Lindsey & Ryan (1998) observam que para dados de sobrevivência intervalar com $L = U$, $U = \infty$ e $L = 0$, tem-se casos especiais de tempos exatos de falha, censuras à direita e censuras à esquerda, respectivamente.

A variável aleatória não-negativa T, usualmente contínua, que representa o tempo de falha, é geralmente especificada em análise de sobrevivência pela sua função de sobrevivência ou pela função de taxa de falha ou de risco. Considerando-se que T tem distribuição de probabilidade contínua com função densidade de probabilidade $f(t)$, a função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(t) = P(T < t) = \int_0^t f(u)du.$$

A função de sobrevivência é definida como a probabilidade de uma observação não falhar até um certo tempo t, ou seja, a probabilidade de uma observação sobreviver ao tempo t, e pode ser escrita como:

$$S(t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(u)du.$$

Na prática, quando não há observações censuradas, a função de sobrevivência é estimada, de forma não-paramétrica, pela proporção de indivíduos que sobreviveram ao instante t com relação ao total de indivíduos no estudo. Entretanto, na presença de observações censuradas, estimadores mais gerais devem ser considerados. A função de sobrevivência $S(t)$ é não-crescente com o tempo, sendo que: $\lim_{t\to 0} S(t) = 1$ e $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

A função de taxa de falha ou de risco descreve a forma em que a taxa instantânea de falha muda com o tempo, ou seja, mostra a probabilidade de um indivíduo falhar no tempo $t + \triangle t$, com $\triangle t \to 0$, dado que ele sobreviveu até o tempo t dividido por $\triangle t$, e é definida por:

$$h(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \triangle t | T \geq t)}{\triangle t} = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} log(S(t)),$$

enquanto a função de taxa de falha acumulada é definida por:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du.$$

Uma função de risco crescente indica que a taxa de falha do paciente aumenta com o transcorrer do tempo. Uma função constante indica que a taxa de falha não se altera com o passar do tempo. Uma função decrescente mostra que a taxa de falha diminui à medida que o tempo passa.

Para o tempo de vida de seres humanos, a função de risco é uma combinação das três formas citadas acima. E neste caso ela assume uma forma conhecida como *curva da banheira*, em que a taxa de falha decresce, no período inicial, representa a mortalidade infantil, seguida por uma taxa de falha constante na fase intermediária e crescente na porção final.

3.2 Distribuição Log-Normal Generalizada (LNG)

A família Log-Normal Generalizada (LNG) é uma família de distribuições de 3 parâmetros proposta por Chen (1995). Ela inclui a distribuição Log-Normal como um caso especial. Em essência, a distribuição LNG está relacionada às transformações Box-Cox. Sua definição geral é o resultado de tratar das probabilidades das caudas que são geralmente ignoradas na maioria dos estudos sobre as transformações Box-Cox (Silveira et al., 2010).

Para $t > 0$ e para λ real, define-se a família de transformações Box-Cox por

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^{\lambda}-1}{\lambda}, & \text{se} \quad \lambda \neq 0, \\ \log(t), & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Seja $\Theta = \{\theta' = (\lambda, \mu, \sigma^2) | \lambda \in R, \sigma > 0\}$. Então para algum $\theta \in \Theta$, e para $t > 0$, define-se a função densidade de probabilidade da Lognormal Generalizada como

$$f(t; \lambda, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{\phi\{(y(t)-\mu)/\sigma\}t^{\lambda-1}}{\sigma\Phi(\delta)}, & \text{se} \quad \lambda > 0, \\ \frac{\phi\{(\log(t)-\mu)/\sigma\}t^{-1}}{\sigma}, & \text{se} \quad \lambda = 0, \\ \frac{\phi\{(y(t)-\mu)/\sigma\}t^{\lambda-1}}{\sigma\Phi(-\delta)}, & \text{se} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{2}$$

em que $\delta = \frac{(\mu+1/\lambda)}{\sigma}$, Φ a função densidade acumulada da Normal padrão e ϕ a função de distribuição da Normal padrão.

Fazendo $\lambda = 0$, verifica-se que esta família de distribuções tem a distribuição Log-Normal como um caso particular. Também, se $T \sim f(t; \lambda, \mu, \sigma^2)$, então a função de distribuição acumulada para T é dada por

$$F(t; \lambda, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{\Phi(\delta(t))+\Phi(\delta)-1}{\Phi(\delta)}, & \text{se} \quad \lambda > 0, \\ \frac{\Phi(\log(t)-\mu)}{\sigma}, & \text{se} \quad \lambda = 0, \\ \frac{\Phi(\delta(t))}{\Phi(-\delta)}, & \text{se} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{3}$$

em que $\delta(t) = \frac{y(t)-\mu}{\sigma}$.

A Figura 1 mostra a função densidade de probabilidade da distribuição Lognormal Generalizada para $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Já na Figura 2 encontram-se a função densidade de probabilidade para $\lambda = 0$ e a função de risco para λ =1, 0.5, 0, -0.5 e -1 e $\mu = \sigma = 1$.

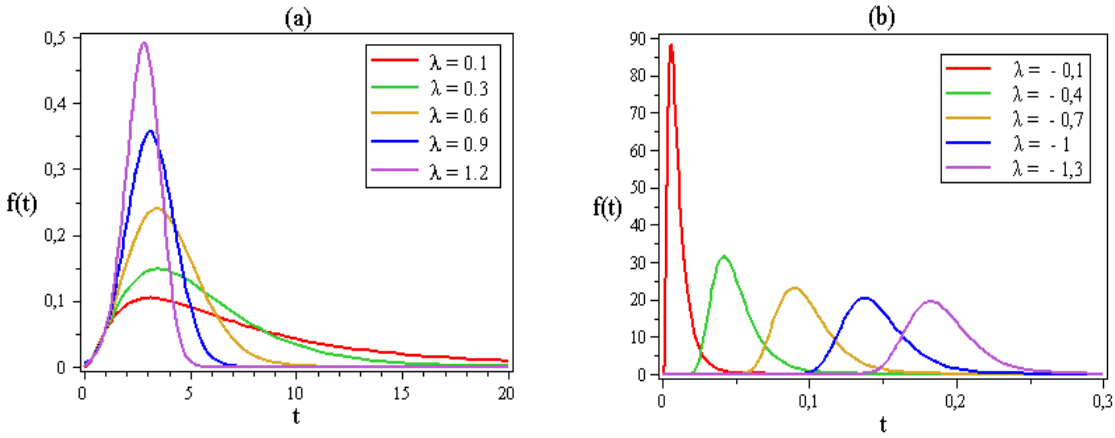

Figura 1 - Função densidade de probabilidade da distribuição LNG considerando (a) $\mu = 2$, $\sigma = 1$ e $\lambda > 0$ e (b) $\mu = -6$, $\sigma = 1$ e $\lambda < 0$.

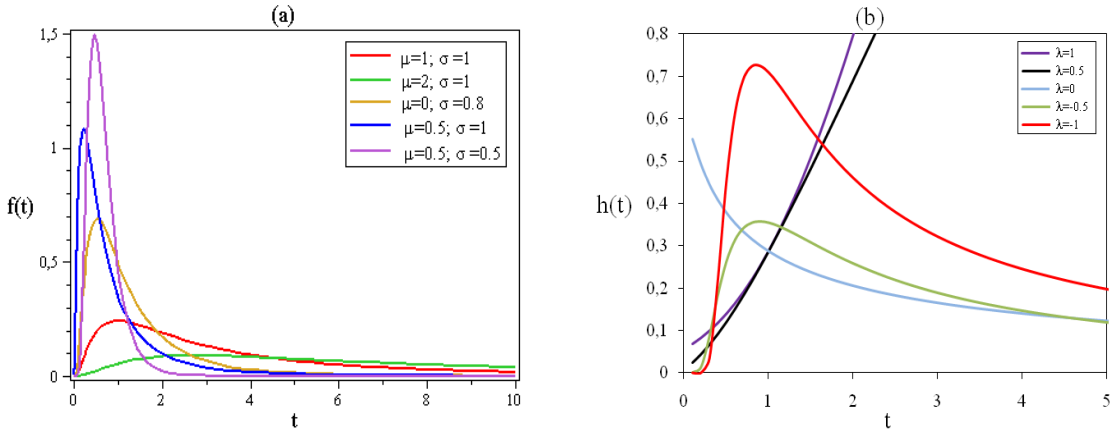

Figura 2 - Função densidade de probabilidade considerando (a) $\lambda = 0$ e função de risco considerando (b) $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ da distribuição LNG

3.3 Distribuição Weibull Generalizada (WG)

O primeiro estudo da distribuição de Weibull (Weibull, 1939) apareceu em um jornal escandinavo e lidou com a resistência dos materiais. Um estudo posterior em inglês (Weibull, 1951) foi um marco em que Wallodi Weibull modelou conjuntos de dados de diversas áreas, mostrando a flexibilidade do modelo em termos de suas aplicações em diferentes áreas.

Um modelo semelhante foi proposto anteriormente por Rosen & Rammler (1933) no contexto da modelagem da variabilidade no diâmetro das partículas de pó sendo maiores que um tamanho específico. A primeira publicação conhecida que lida com a distribuição de Weibull é uma obra de Fisher & Tippett (1928), onde esta distribuição é obtida como distribuição limite do máximo em uma amostra.

Apesar de Wallodi Weibull não ser a primeira pessoa a propor a distribuição, ele foi fundamental na sua promoção como um modelo útil e flexível, com uma ampla gama de aplicabilidade. Assim, devido a sua simplicidade e flexibilidade em acomodar diferentes formas de funções de risco, esta distribuição é muito utilizada em análises estatísticas de tempos de sobrevida ou tempo de resposta de dados

de experimentos de confiabilidade e estudos de sobrevivência.

A grande utilização da distribuição Weibull se deve ao fato dela acomodar uma grande variedade de formas, todas tendo uma propriedade básica: a sua função de taxa de falha é monótona, ou seja, ela é crescente, decrescente ou constante.

Para uma variável aleatória T com distribuição de Weibull, a função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t;\alpha,\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha^{\gamma}} t^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\}, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

em que γ, o parâmetro de forma, e α, o de escala, são ambos positivos.

Para esta distribuição, as funções de distribuição acumulada, de sobrevivência e de risco são, respectivamente,

$$F(t;\alpha,\gamma) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\}, \tag{5}$$

$$S(t;\alpha,\gamma) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\gamma}\right\} \qquad \text{e} \tag{6}$$

$$h(t;\alpha,\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha^{\gamma}} t^{\gamma-1}. \tag{7}$$

A função de taxa de falha $h(t)$ da distribuição de Weibull é: estritamente crescente para $\gamma > 1$, estritamente decrescente para $\gamma < 1$ e constante para $\gamma = 1$. Para $\gamma = 1$, tem-se a função de taxa de falha da distribuição exponencial, um caso particular da Weibull. As formas da função de risco e densidade de probabilidade da Weibull são apresentadas na Figura 3.

Contudo, a distribuição de Weibull é inapropriada quando a taxa de falha tem a forma unimodal ou de banheira.

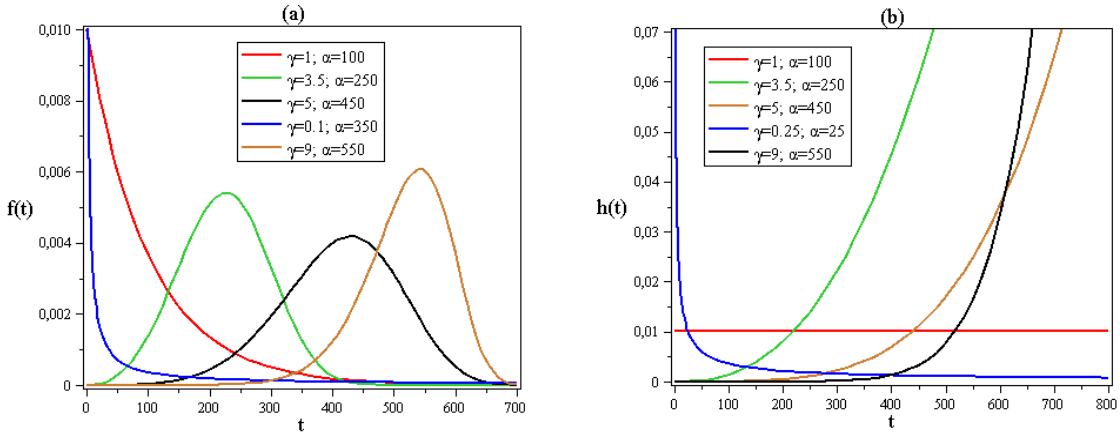

Figura 3 - Função densidade de probabilidade (a) e função de risco (b) da distribuição de Weibull.

A distribuição de Weibull está incorporada em uma grande família obtida pela adição de um parâmetro de forma. Esta família generalizada não contém somente distribuições com taxas de risco unimodal e banheira, mas também permite uma classe mais ampla de taxas de risco monótonas. Além disso, as distribuições desta família são analiticamente tratáveis e computacionalmente gerenciáveis (Mudholkar et al., 1996).

Nos últimos anos diversos trabalhos envolvendo generalizações da Weibull foram desenvolvidos, dentre os quais podemos citar, Silva et al. (2010) que usaram a distribuição beta Weibull modificada com aplicações em dados relativos a tempo de vida de dispositivos. Carrasco et al. (2008) assumiram dados censurados, calculando os estimadores de máxima verossimilhança e *Jackknife* para os parâmetros do modelo log-Weibull modificada e verificando influências locais sobre diferentes esquemas de pertubação nos parâmetros. Souza et al. (2011) propuseram a distribuição Weibull-Geométrica, a qual generaliza a distribuição Exponencial-Geométrica Extendida, obtiveram a matriz de informação observada e ilustraram a flexibilidade dessa distribuição por meio de um conjunto de dados relativo à vida útil de 67 espécimes de liga T7987 .

A família de distribuições Weibull Generalizada é dada, em termos da

função quantílica, por

$$Q(u) = \begin{cases} \sigma \left[\frac{1-(1-u)^{\lambda}}{\lambda}\right]^{\alpha} & \lambda \neq 0, \\ \sigma \left[-\log(1-u)\right]^{\alpha} & \lambda = 0, \end{cases} \tag{8}$$

em que $\alpha, \sigma > 0$ e λ é um número real.

Invertendo a função quantílica dada por (8), a função de distribuição acumulada da distribuição Weibull Generalizada é

$$F(t; \alpha, \lambda, \sigma) = 1 - \left[1 - \lambda \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \tag{9}$$

em que $t \in (0, \infty)$ para $\lambda \leq 0$ e $t \in (0, \frac{\sigma}{\lambda^{\alpha}})$ para $\lambda > 0$.

A família dada por (8) se reduz à Weibull quando $\lambda = 0$, a distribuição exponencial para $\alpha = 1$, $\lambda = 0$ e a distribuicão log-logística para $\lambda = -1$, às quais são frequentemente usadas em estudos de sobrevida. O mais importante é que para $\lambda \leq 0$ e $\alpha > 0$ a função quantílica dada por (8) coincide com a distribuição Burr XII (Mudholkar et al., 1996).

As funções de sobrevivência e de taxa de falha são dadas, respectivamente, por:

$$S(t; \alpha, \lambda, \sigma) = \left[1 - \lambda \left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \qquad \text{e} \tag{10}$$

$$h(t; \alpha, \lambda, \sigma) = \frac{\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha\sigma\left(1 - \lambda\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}. \tag{11}$$

Segundo Mudholkar et al. (1996) uma característica interessante da família Weibull Generalizada é que sua função de risco assume 4 formas diferentes nas 4 regiões do plano, divididas pelas linhas $\alpha = 1$ e $\lambda = 0$. Esta característica da função de risco está resumida no seguinte teorema:

Teorema 1: Para a família Weibull generalizada, a função de risco $h(t)$ tem a forma de banheira para $\alpha > 1$ e $\lambda > 0$, monótona decrescente para $\alpha \geq 1$ e $\lambda \leq 0$, unimodal

para $\alpha < 1$ e $\lambda < 0$, monótona crescente para $\alpha \leq 1$ e $\lambda \geq 0$ e constante para $\alpha = 1$ e $\lambda = 0$. *(Prova do teorema 1 vide Mudholkar et al. (1996), página 1582).*

As formas da função de risco, às quais são apresentadas no Teorema 1, e a função densidade de probabilidade podem ser visualidas nas Figuras 4, 5 e 6.

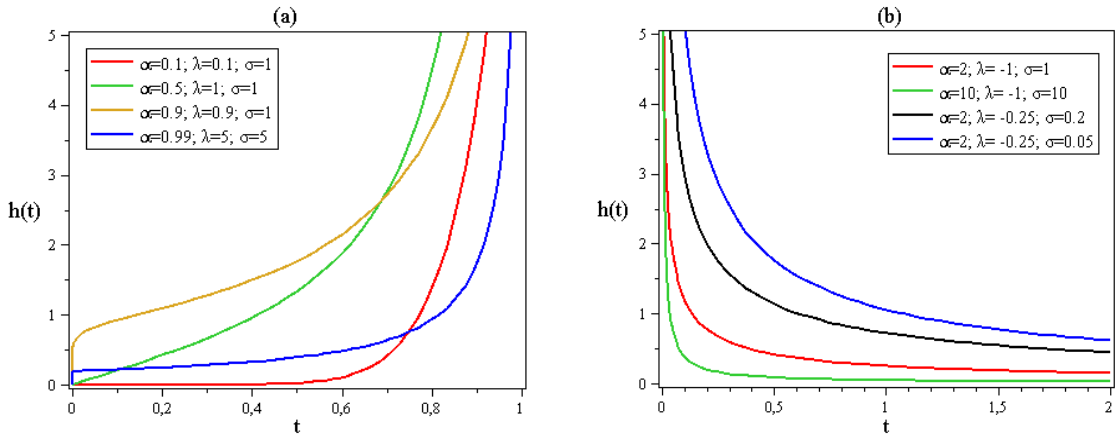

Figura 4 - Função de taxa de falha da distribuição WG (a) monótona crescente e (b) monótona decrescente.

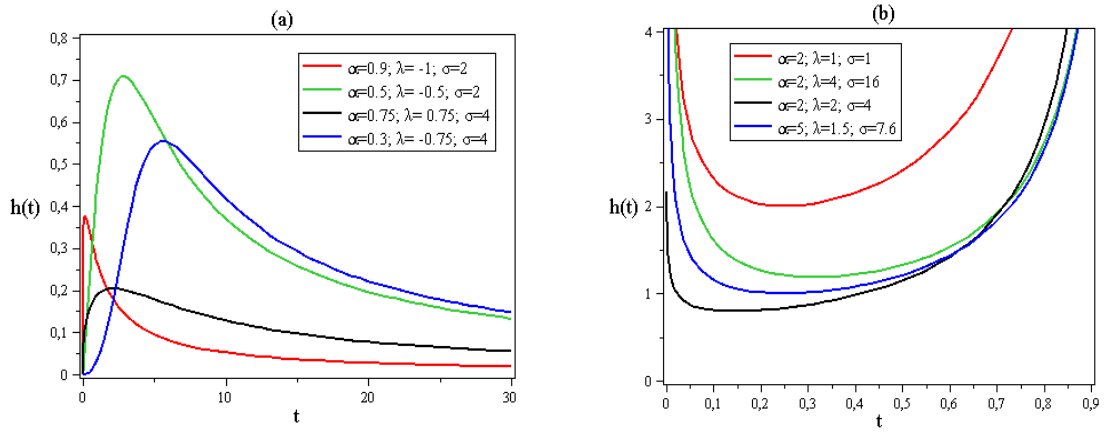

Figura 5 - Função de taxa de falha da distribuição WG (a) unimodal e (b) banheira.

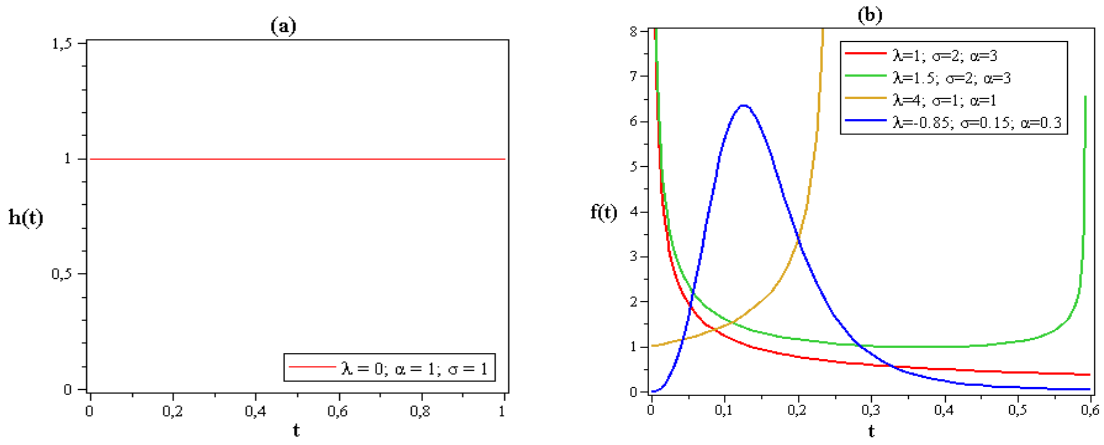

Figura 6 - Função de taxa de falha (a) constante e (b) função densidade de probabilidade da distribuição WG.

3.4 Distribuição Log-Weibull Exponenciada (LWE)

Seja T uma variável aleatória que segue uma distribuição Weibull Exponenciada com parâmetros $(\alpha, \theta, \gamma)'$. A função densidade de probabilidade para T, de acordo com Mudholkar et al. (1995), é dada por

$$f(t;\alpha,\lambda,\gamma) = \frac{\alpha\lambda}{\gamma}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right]\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha-1}. \tag{12}$$

A função de sobrevivência correspondente é dada por:

$$S(t;\alpha,\lambda,\gamma) = 1-\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda}, 0<t<\infty, \tag{13}$$

$\alpha > 0$, $\lambda > 0$ são os parâmetros de forma e $\gamma > 0$ é um parâmetro de escala.

Quando λ é um número inteiro, (13) é a função de sobrevivência que resulta em maiores falhas da Weibull e corresponde à família Weibull quando $\lambda = 1$ (Mudholkar et al., 1995). A função de risco ou função de taxa de falha é dada por

$$h(t;\alpha,\lambda,\gamma) = \frac{\alpha\lambda\left[1-\exp\left(-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right)\right]^{\lambda-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha-1}}{\gamma\left[1-\left(1-\exp\left(-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\right)\right)^{\lambda}\right]}. \tag{14}$$

A grande flexibilidade deste modelo para o ajuste de dados de tempo de vida são as diferentes formas que a função de taxa de falha pode assumir (re-

presentadas nas Figuras 7 e 8), a saber: monótona crescente ($\alpha \geq 1$ e $\alpha\lambda \geq 1$), monótona decrescente ($\alpha \leq 1$ e $\alpha\lambda \leq 1$), forma de banheira ($\alpha > 1$ e $\alpha\lambda < 1$) e unimodal ($\alpha < 1$ e $\alpha\lambda > 1$).

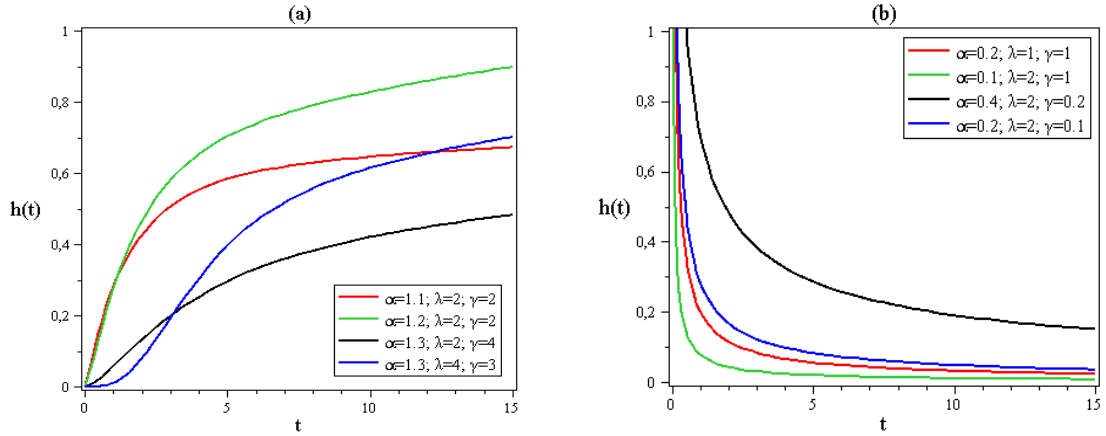

Figura 7 - Função de taxa de falha da distribuição WE (a) monótona crescente e (b) monótona decrescente.

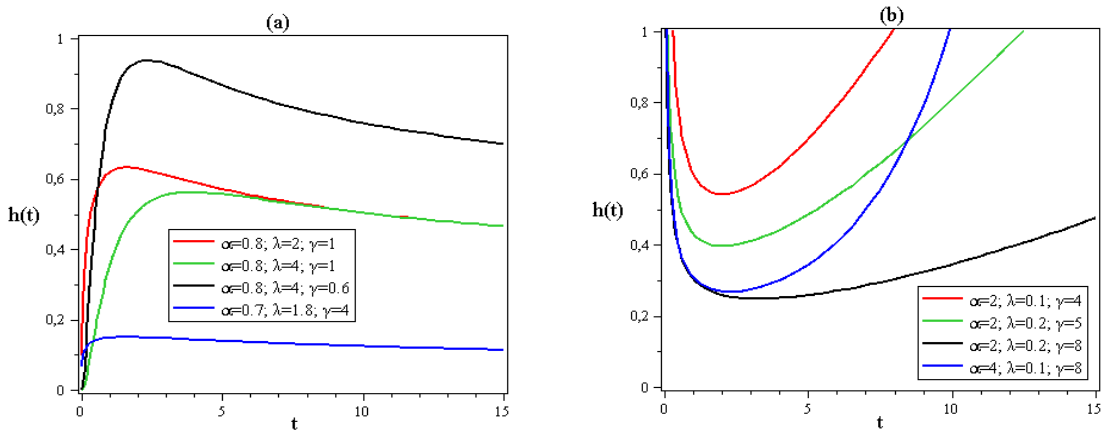

Figura 8 - Função de taxa de falha da distribuição WE (a) unimodal e (b) em forma de banheira.

A Figura 9 mostra a função densidade de probabilidade da WE para algumas combinações dos parâmetros.

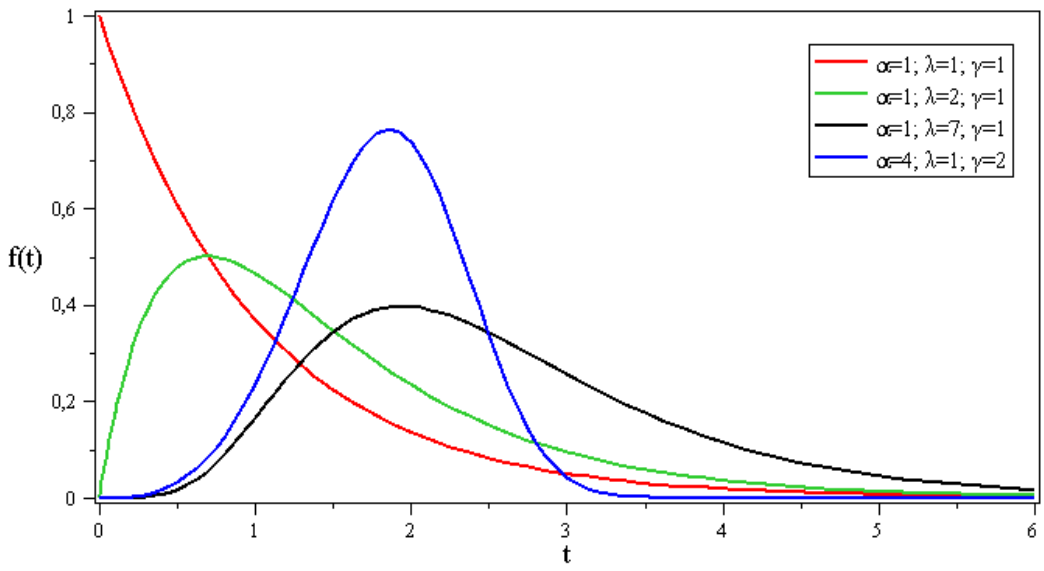

Figura 9 - Gráfico da função de densidade da distribuição WE.

O uso da distribuição WE para modelar dados relativos à confiabilidade foi feito por Mudholkar et al. (1995). Pal et al. (2006) estudaram algumas propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança e resultados de normalidades assintóticas dos parâmetros da distribuição Weibull Exponenciada.

Seja T uma variável aleatória seguindo a distribuição Weibull Exponenciada (WE). A variável aleatória $Y = \log(T)$, apresentada em Hashimoto et al. (2010), segue uma distribuição Log-Weibull Exponenciada (LWE) com função de densidade parametrizada em termos de $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ e $\mu = \log(\gamma)$, cuja densidade é

$$f(y;\lambda,\sigma,\mu) = \frac{\lambda}{\sigma}\left\{1-\exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{\lambda-1}\exp\left[\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \tag{15}$$

$-\infty < y < \infty$, $\lambda > 0$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$. As funções de sobrevivência e de risco correspondem, respectivamente, a

$$S(y;\lambda,\sigma,\mu) = 1 - \left\{1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}^{\lambda}, \tag{16}$$

$$h(y;\lambda,\sigma,\mu) = \frac{\lambda\left\{1-\exp\left(-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)\right\}^{\lambda-1}\exp\left(\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)}{1-\left[1-\exp\left\{-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right]^{\lambda}}. \tag{17}$$

Na Figura 10 encontram-se algumas formas da função de risco da distribuição Log-Weibull Exponenciada (LWE), todas estritamente crescentes.

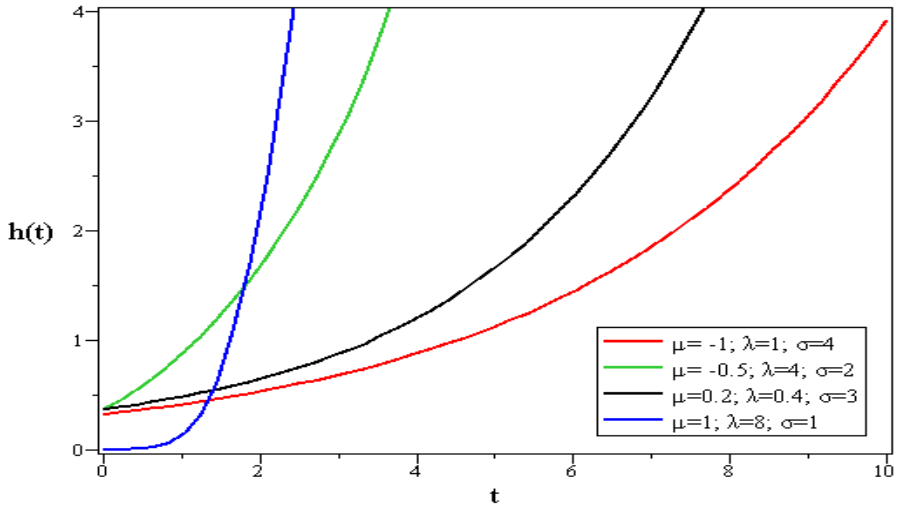

Figura 10 - Função de risco da distribuição LWE.

A variável aleatória padronizada $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ tem a função de densidade

$$f(z) = \lambda\left\{1-\exp\left[-\exp(z)\right]\right\}^{\lambda-1}\exp\left[z-\exp(z)\right], \quad -\infty < z < \infty. \tag{18}$$

A distribuição do Valor extremo padrão corresponde à escolha particular de $\lambda = 1$.

Cancho et al. (2009) apresentam uma modificação dessa distribuição afim de permitir que sobreviventes "a longo prazo" estejam presentes nos dados. A modificação considera um modelo de regressão Log-Weibull Exponenciada com fração de cura. Este modelo tenta estimar a aceleração (desaceleração) do tempo de um dado evento e a fração de sobreviventes, ou seja, a proporção da população

para o qual o evento nunca ocorre. Foram utilizados métodos de máxima verossimilhança e bayesiano para estimar os parâmetros e feita uma análise residual (deviance e martingal) do ajuste. Os resultados das aplicações em um conjunto de dados reais indicaram que o ajuste do modelo foi apropriado, visto que possibilitou a detecção de algumas observações que poderiam alterar consideravelmente os níveis de significância de algumas variáveis.

3.5 Distribuição Burr XII

"A distribuição Burr XII foi introduzida por Irving Wingate Burr(1942), tendo diversas aplicações em análise de confiabilidade como um modelo alternativo mais flexível que o modelo Weibull" (Wang et al. (1996); Soliman (2005); Wu et al. (2007)). A distribuição Burr XII usada em Zimmer et al. (1998) com parâmetros σ, α e λ considera que o tempo de vida T tem uma função de densidade dada por

$$f(t;\sigma,\lambda,\alpha) = \alpha\lambda\left(1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)^{-(\lambda+1)}\frac{t^{\alpha-1}}{\sigma^{\alpha}}, \quad t>0, \tag{19}$$

em que $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ são os parâmetros de forma e $\sigma > 0$ é um parâmetro de escala. A função de sobrevivência e taxa de falha para esta variável aleatória são dadas, respectivamente, por

$$S(t;\sigma,\lambda,\alpha) = \left(1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)^{-\lambda} \qquad \text{e} \tag{20}$$

$$h(t;\sigma,\lambda,\alpha) = \frac{\alpha\lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\alpha-1}}{\sigma\left(1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\alpha}\right)}. \tag{21}$$

De acordo com Zimmer et al. (1998), a função taxa de falha da distribuição Burr XII é decrescente quando $\alpha \leq 1$ e quando $\alpha > 1$ a função de taxa de falha atinge um valor máximo e decresce assumindo uma forma unimodal.

As Figuras 11 e 12 mostram os gráficos das funções de risco (a,b,c) e função densidade de probabilidade (d) da distribuição Burr XII para algumas

variações combinadas dos parâmetros. Nota-se que a função de taxa de falha é decrescente para $\alpha \leq 1$, unimodal para $\alpha > 1$ e para $1 < \alpha < 2$, dependendo do parâmetro de forma σ, é praticamente constante sob quase toda amplitude da função.

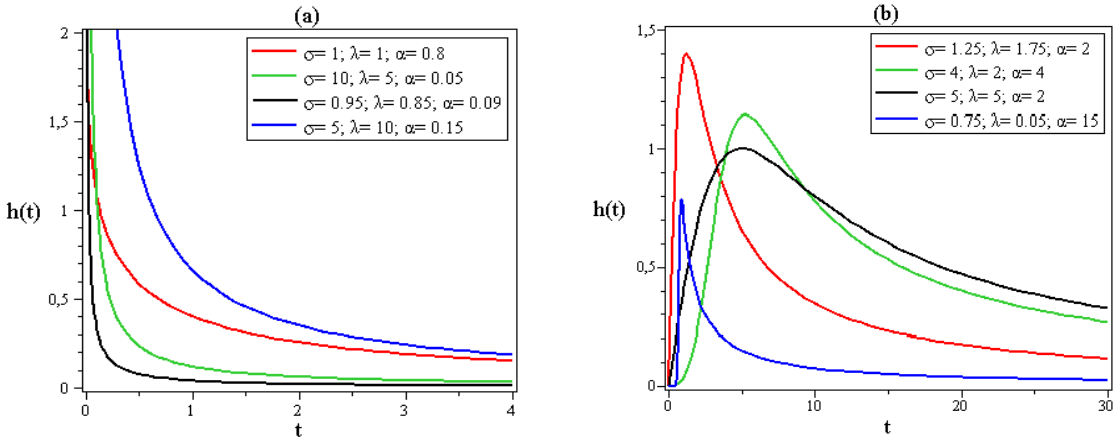

Figura 11 - Função de taxa de falha da distribuição Burr XII (a) decrescente e (b) unimodal.

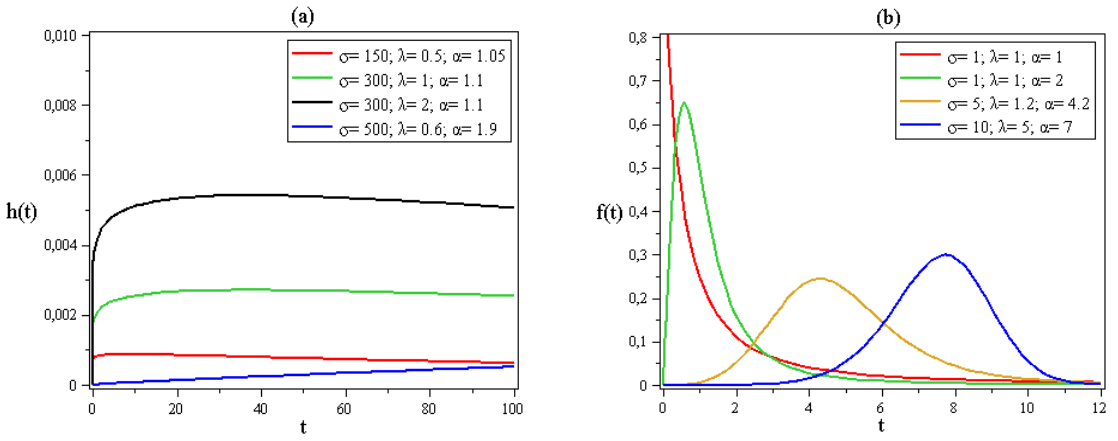

Figura 12 - Função de taxa de falha quase constante (a) e função de densidade (b) da distribuição Burr XII.

A partir da função de densidade da distribuição Burr XII dada na equação (19), observa-se que fazendo $\rho = \frac{1}{\sigma}$ e $\lambda = 1$, a distribuição Burr XII se reduz a distribuição log-logística com função de sobrevivência dada por $S(t; \rho, \alpha) = \frac{1}{1+(t\rho)^{\alpha}}$.

Segundo Soliman (2005) a distribuição Burr XII tem duas vantagens:

1. Tanto a função de distribuição acumulada quanto a função de sobrevivência podem ser escritas de forma fechada, simplificando o cálculo dos percentis e a função de verossimilhança para dados censurados.

2. Tem caudas algébricas, as quais são efetivas para modelar falhas que ocorrem com menos frequências que em modelos baseados em caudas exponenciais.

Rodriguez (1977) mostrou que a área de cobertura da distribuição Burr XII em um determinado plano é ocupada por várias distribuições conhecidas e úteis, incluindo a distribuição Normal, Log-Normal, Gama, Logística e Valor Extremo tipo I.

Seja T uma variável aleatória com distribuição Burr XII. Considere a variável $Y = \log(T)$ e a reparametrização $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ e $\sigma = \exp(\mu)$. A função de densidade de Y pode ser escrita como

$$f(y; \lambda, \gamma, \mu) = \frac{\lambda}{\gamma}\left(1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\gamma}\right)\right)^{-(\lambda+1)} \exp\left(\frac{y-\mu}{\gamma}\right), -\infty < y < \infty \qquad (22)$$

em que $\lambda > 0$, $\gamma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$. Esta nova distribuição foi denominada de Log-Burr XII por Silva (2008). A função de sobrevivência e de risco são dadas, respectivamente, por

$$S(y; \lambda, \mu, \gamma) = \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\gamma}\right)\right]^{-\lambda} \qquad \text{e} \qquad (23)$$

$$h(y; \lambda, \mu, \gamma) = \frac{\lambda \exp(\frac{y-\mu}{\gamma})}{\gamma\left(1 + \exp(\frac{y-\mu}{\gamma})\right)}. \qquad (24)$$

Na Figura 13 são apresentadas as funções de risco e densidade de probabilidade da distribuição Log-Burr XII.

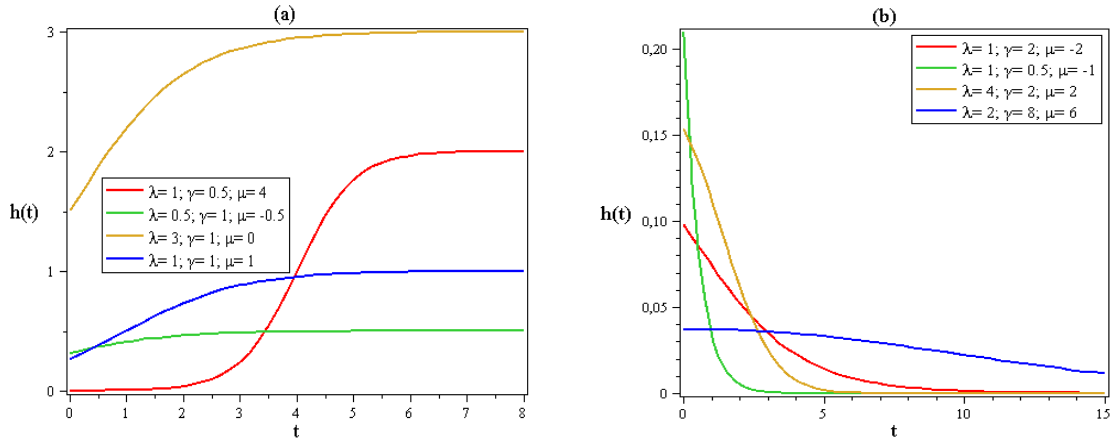

Figura 13 - Função de risco (a) e função de densidade (b) da distribuição Log-Burr XII.

3.6 Função de Verossimilhança

Segundo Colosimo e Giolo (2006), a natureza discreta dos tempos de falha deve ser explicitamente reconhecida quando existe um grande número de empates. Métodos para tratar dados discretos ou grupados são apresentados por Lawless (1982) e Collett (2003). A estrutura de regressão é especificada em termos da probabilidade de um indivíduo sobreviver a um certo tempo condicional à sua sobrevivência ao tempo de visita anterior.

Quando realizações de uma distribuição de vida contínua são agrupados, a estimação pode ser baseada na função de verossimilhança para dados agrupados.

Suponha que os tempos de vida, T_l, $l = 1, ..., n$, em que n é o tamanho da amostra, são agrupados em k intervalos, $I_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, ..., k$, com, $0 = a_0 < a_1 < ... < a_k = \infty$ e assuma que todas as censuras ocorrem no final do intervalo. Seja D_i o conjunto dos índices que representam os indivíduos que morreram no intervalo I_i e R_i, o conjunto dos índices que representam os indivíduos sob risco no início de I_i. Assim, a seguir, pôde-se construir a função de verossimilhança para dados grupados e censurados, em que as contribuições de falha e censura para a verossimilhança são,

respectivamente:

(i) contribuição de uma falha para a verossimilhança:

$$[(1 - p_1(\mathbf{x}_l)) \dots (1 - p_{i-1}(\mathbf{x}_l))](p_i(\mathbf{x}_l)) \tag{25}$$

(ii) contribuição de uma censura para a verossimilhança (supondo censura no final do intervalo):

$$[(1 - p_1(\mathbf{x}_l)) \dots (1 - p_i(\mathbf{x}_l))] \tag{26}$$

(iii) com base em (i) e (ii), obtém-se a função de verossimilhança para dados grupados e censurados na presença de variáveis regressoras:

$$\prod_{i=1}^{k}\Big[\prod_{l \in D_i} p_i(\mathbf{x}_l) \prod_{l \in R_i - D_i} (1 - p_i(\mathbf{x}_l))\Big] = \prod_{i=1}^{k} \prod_{l \in R_i} p_i(\mathbf{x}_l)^{\triangle_{l_i}} (1 - p_i(\mathbf{x}_l))^{1-\triangle_{l_i}} \tag{27}$$

em que $p_i(\mathbf{x}_l)$ é a probabilidade do l-ésimo indivíduo morrer até a_i dado que ele sobreviveu até a_{i-1} e o vetor de variáveis regressoras $\mathbf{x}_l$, $\triangle_{l_i}$ é a variável indicadora de falha no i-ésimo intervalo, a qual assume valor zero quando a l-ésima observação é censurada no i-ésimo intervalo e um, em caso contrário (Chalita, 1997).

A função de verossimilhança dada por (27) corresponde a de uma distribuição de Bernoulli, pois a variável aleatória em questão, $\triangle_{l_i}$, é binária, isto é, o l-ésimo indivíduo morreu ou não no intervalo I_i.

Dessa forma, para a obtenção da função de verossimilhança para dados grupados dos modelos que estão sendo propostos, é necessário obter $p_i(\mathbf{x}_l)$ para o l-ésimo indivíduo da amostra. E esta pode ser obtida por:

$$p_i(\mathbf{x}_l) = P[T_l < a_i | T_l \geq a_{i-1}, \mathbf{x}_l] = \frac{F_l(a_i;\Theta) - F_l(a_{i-1};\Theta)}{1 - F_l(a_{i-1};\Theta)} = 1 - \frac{S_l(a_i;\Theta)}{S_l(a_{i-1};\Theta)}, \tag{28}$$

em que $F_l(a_i;\Theta)$ e $S_l(a_i;\Theta)$ representam, respectivamente, as funções de distribuição acumulada e de sobrevivência do l-ésimo indivíduo no intervalo $[a_{i-1}, a_i)$, sujeito ao espaço paramétrico Θ.

A estimação paramétrica é feita maximizando a função log-verossimilhança dada por:

$$\ln(L) = \ln\left(\prod_{i=1}^{k}\Big[\prod_{l\in D_i} p_i(\mathbf{x}_l) \prod_{l\in R_i - D_i}(1-p_i(\mathbf{x}_l))\Big]\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{l\in R_i} p_i(\mathbf{x}_l)^{\triangle_{l_i}}(1-p_i(\mathbf{x}_l))^{1-\triangle_{l_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{l\in R_i}\left[\Delta l_i \ln(p_i(\mathbf{x}_l)) + \ln(1-p_i(\mathbf{x}_l)) - \Delta l_i \ln(1-p_i(\mathbf{x}_l))\right] \tag{29}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{l\in R_i}\left[\Delta l_i\left(\ln\left(\frac{p_i(\mathbf{x}_l)}{1-p_i(\mathbf{x}_l)}\right)\right) + \ln(1-p_i(\mathbf{x}_l))\right].$$

Para maximização da função log-verossimilhança dada em (29), pode-se utilizar o processo iterativo de Newton-Raphson.

Os modelos para dados grupados e censurados apresentados por Silveira et al. (2010) encontram-se a seguir;

1) **Modelo de Riscos Proporcionais de Cox**

Assumindo o modelo de riscos proporcionais de Cox para o tempo de vida T, a função de sobrevivência $S(t)$, apresenta a seguinte forma:

$$1 - F(t) = S(t|\mathbf{x}_l) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u|x)du\right\} = [S_0(t)]^{\exp\{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l\}}, \tag{30}$$

em que $S_0(t)$ é a função de sobrevivência básica. Então, $p_i(\mathbf{x}_l)$ é dado por:

$$p_i(\mathbf{x}_l) = 1 - \gamma_i^{\exp\{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l\}}, \tag{31}$$

em que $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ e $\gamma_i = \frac{S_0(a_i)}{S_0(a_{i-1})}$, para $i = 1, \ldots, k$.

2) **Modelo Logístico**

Assumindo o modelo logístico para o tempo de vida T, tem-se que:

$$p_i(x_l) = 1 - (1 + \gamma_i \exp\{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l\})^{-1} \tag{32}$$

em que $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ e $\gamma_i = \frac{p_i(0)}{1-p_i(0)}$, para $i = 1, \ldots, k$.

3) **Modelo Log-Normal Generalizada**

Adotando-se o modelo com base na distribuição Log-Normal Generalizada (Silveira et al., 2010), para $\lambda > 0$, tem-se que $p_i(\mathbf{x}_l)$ é dada por:

$$p_i(\mathbf{x}_l) = \frac{\Phi(\delta(a_i)) - \Phi(\delta(a_{i-1}))}{1 - \Phi(\delta(a_{i-1}))}, \tag{33}$$

sendo Φ a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão, λ o parâmetro da transformação Box-Cox, $\delta(a_i) = \frac{a_i(\lambda) - \left(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l\right)}{\sigma}$, $a_i(\lambda) = \frac{a_i(\lambda)-1}{\lambda}$ e $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

4) **Modelo Weibull Exponenciada**

Com base na distribuição Weibull Exponenciada apresentada na equação (12), tem-se que $p_i(x_l)$ é dada por:

$$p_i(x_l) = 1 - \frac{1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{a_i - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\gamma}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda}}{1 - \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{a_{i-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\gamma}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{\lambda}} \tag{34}$$

em que: $0 < t < \infty$; $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ são os parâmetros de forma; γ é um parâmetro de escala e $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

3.7 Critério de Informação de Akaike Corrigido

De acordo com Burnham & Anderson (1998), Akaike mostrou que a principal dificuldade nos critérios de seleção de modelos, baseados na informação de Kullback-Leibler (K-L), era estimar

$$E_Y E_X \left[\log(g(x|\hat{\theta}(y)))\right] \tag{35}$$

em que a parte entre colchetes é $E_f[\log(g(x|\theta))]$ com θ substituído pelo estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ de acordo com modelo assumido g e dados y. X e Y representam amostras aleatórias independentes de uma mesma distribuição. As

esperanças com relação a X e a Y são o foco de todas as discussões de seleção de modelos baseados na informação de K-L (por exemplo, AIC e AIC_C).

Akaike (1974) verificou que o valor que maximiza o log-verossimilhança é um estimador viciado de $E_Y E_X[log(g(x|\hat{\theta}(y)))]$, sendo este viés aproximadamente igual ao número de parâmetros estimáveis (K) do modelo aproximado. Dessa forma, um estimador não-viciado de $E_Y E_X[\log(g(x|\hat{\theta}(y)))]$ para grandes amostras é $\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) - K$.

Este resultado é equivalente a

$$\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) - k = C - \hat{E}_{\hat{\theta}}[I(f, \hat{g})] \tag{36}$$

em que $\hat{g} = g(.|\hat{\theta})$ e $\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)$ é a função de verossimilhança.

Com a descoberta de Akaike tornou-se possível a combinação entre a estimação (Verossimilhança ou Mínimos Quadrados) e seleção do modelo. Assim, Akaike encontrou um estimador da esperança, a informação K-L relativa baseada na função log-verossimilhança maximizada, que corrigindo o viés assintótico, resulta em

$$\hat{E}(K - L)\ \ relativo = \log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y) - K \tag{37}$$

em que K é o termo de correção do viés assintótico. Ao multiplicar este resultado por -2 (Akaike, 1974), este tornou-se conhecido como "Critério de Informação de Akaike" (AIC),

$$AIC = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2K. \tag{38}$$

O modelo com o menor valor de AIC é escolhido como melhor modelo para ajustar um determinado conjunto de dados. Um outro critério para seleção de modelos é o Critério de Informação de Akaike Corrigido (AIC_C), também conhecido por Critério de Informação de segunda ordem, o qual leva em conta o tamanho da amostra e aumenta a pena relativa à complexidade do modelo (número de parâmetros) com pequenos conjuntos de dados. Dessa forma, recomenda-se o uso do

AIC_C sempre que a razão $\frac{n}{K}$ não ultrapassar o valor 40, para o modelo com o maior valor de K. O AIC_C é definido por

$$AIC_C = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-K-1}. \tag{39}$$

3.8 Estimador de Turnbull

Quando o conjunto de dados amostrais de tempos de falha apresenta censuras, tornam-se necessárias técnicas estatísticas especializadas para acomodar a informação nestas observações. A observação censurada informa que o tempo até a falha é maior do que aquele que foi registrado. Uma das técnicas não-paramétricas utilizadas para se estimar a função de sobrevivência $S(t)$ é o estimador de Turnbull, que trata-se de um estimador limite-produto modificado proposto por Turnbull em 1976. Tal estimador, que não tem uma forma analítica fechada, é baseado em um procedimento iterativo (Colosimo & Giolo, 2006).

Considere $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$ uma sequência de tempos que inclui todos os pontos L_i e U_i, para $i = 1, \ldots, n$, representando uma amostra de tamanho n. Para a i-ésima observação, defina um peso α_{ij} de modo que este seja igual a 1, se o intervalo $(\tau_{j-1}, \tau_j]$, para $j = 1, \ldots, m$, estiver contido no intervalo $(L_i, U_i]$, e zero, em caso contrário. O peso α_{ij} indica se o evento que ocorreu no intervalo $(L_i, U_i]$ poderia ter ocorrido em τ_j. Um valor inicial em $S(\tau_j)$ deve ser assumido e o algoritmo de Turnbull é como segue:

Passo 1: Encontre a probabilidade de um evento ocorrer no tempo τ_j por:

$$p_j = S(\tau_{j-1}) - S(\tau_j), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Passo 2: Estime o número de eventos ocorridos em τ_j por:

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ij} p_j}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} p_k}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Passo 3: Obtenha o número estimado em risco no tempo τ_j por:

$$Y_j = \sum_{k=j}^{m} d_k.$$

Passo 4: Atualize o estimador limite-produto usando os resultados obtidos nos passos 2 e 3. Se a estimativa atualizada de $S(.)$ estiver próxima da anterior para todo τ_j, pare o procedimento iterativo, caso contrário, repita os passos 1 a 3, usando as estimativas atuais atuais de $S(.)$.

4 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção, serão apresentados os modelos para dados grupados e censurados propostos no presente trabalho, a saber: modelos Weibull Generalizada (Mudholkar et al., 1996), Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010) e Log-Burr XII (Silva, 2008).

4.1 Modelos de Regressão para dados grupados e censurados

Adotando-se o modelo com base na distribuição Weibull Generalizada (Mudholkar et al., 1996) e na equação dada por (28), tem-se que:

$$p_i(x_l) = 1 - \left[\frac{1 - \lambda \left(\frac{a_i - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\sigma} \right)^{1/\gamma}}{1 - \lambda \left(\frac{a_{i-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\sigma} \right)^{1/\gamma}} \right]^{1/\lambda}, \tag{40}$$

em que γ, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

A função de verossimilhança, as derivadas de 1ª e 2ª ordem e o código no SAS para o modelo Weibull Generalizada encontram-se no Apêndice A.

Adotando-se o modelo com base na distribuição Log-Weibull Exponenciada (Hashimoto et al., 2010) e na equação dada por (28), tem-se que:

$$p_i(x_l) = 1 - \left[\frac{1 - \left\{ 1 - \exp\left(- \exp\left(\frac{a_i - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\sigma} \right) \right) \right\}^{\lambda}}{1 - \left\{ 1 - \exp\left(- \exp\left(\frac{a_{i-1} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_l}{\sigma} \right) \right) \right\}^{\lambda}} \right] \tag{41}$$

em que $\lambda, \sigma > 0$ e $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

A função de verossimilhança, as derivadas de 1ª e 2ª ordem e o código no SAS para o modelo LWE encontram-se no Apêndice B.

Adotando-se o modelo com base na distribuição Log-Burr XII (Silva, 2008) e na equação dada por (28), tem-se que:

$$p_i(x_l) = 1 - \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{a_i - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_l}{\gamma} \right)}{1 + \exp\left(\frac{a_{i-1} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_l}{\gamma} \right)} \right]^{-\lambda} \tag{42}$$

em que $\lambda, \gamma > 0$ e $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$.

A função de verossimilhança, as derivadas de 1ª e 2ª ordem e o código no SAS para o modelo Log-Burr XII encontram-se no Apêndice C.

4.2 Dados

4.2.1 Dados de megacolo chagásico

O megacolo chagásico é uma das várias manifestações clínicas da doença de Chagas. Ele altera o trânsito intestinal do Colon, levando o indivíduo a constipações. Muitas técnicas cirúrgicas tem sido realizadas para corrigir as mudanças do trânsito intestinal. Em particular, a técnica descrita por Duhamel e aperfeiçoada por Haddad é uma delas. O objetivo deste estudo é comparar o trânsito intestinal de pacientes pós cirurgia que sofrem da doença de Chagas, com um grupo controle.

O grupo controle consiste de 19 indivíduos que tem ritmo intestinal normal e sem doença de Chagas. O grupo tratamento foi formado por 11 pacientes que sofriam do megácolo chagásico e submetidos à cirurgia de Duhamel-Haddad.

Todos os indivíduos e pacientes receberam um marcador radiológico no início do estudo. O evento de interesse foi o tempo até a eliminação do marcador radiológico. O pesquisador verficou a ocorrência do evento a cada 24h usando um exame de raio-X. Portanto, para os dados resultantes deste estudo foi utilizado

a censura intervalar, pois cada evento era conhecido como tendo ocorrido em um período entre 24 horas, mas o tempo exato não era conhecido (Almeida, 1996).

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, são apresentados os resultados dos valores ajustados para os modelos Weibull Generalizada, Log-Weibull Exponenciada e Log-Burr XII extendidos para dados grupados e censurados, com base no conjunto de dados de megacolo chagásico descritos na seção 3. Também são construídos os gráficos das funções de sobrevivência de Kaplan-Meier e dos modelos propostos para ambos os grupos (controle e pós-operados). Para determinação do melhor modelo, utilizou-se o AICC (Critério de Informação de Akaike Corrigido), uma vez que estes modelos apresentam números de parâmetros diferentes, e para os casos apresentados o uso do AIC aumentaria a chance de escolha de um modelo com menor número de parâmetros. Os valores do AIC_C para estes modelos são apresentados na Tabela 4. A estimação paramétrica, foi feita maximizando a função log-verossimilhança dada por (29). Para tal, foi utilizado a proc NLP do pacote estatístico SAS para Windows (SAS, 2008), via técnica de Newton-Raphson.

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam os valores ajustados dos modelos Weibull Generalizada, Log-Weibull Exponenciada e Log-Burr XII para os dados de megacolo chagásico, respectivamente. Verifica-se que para todos os ajustes a variável grupo (controle ou pós-operados) é significativa ao nível de 1% de significância.

Tabela 1. Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Weibull Generalizada para os dados de megacolo chagásico.

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	Valor t	Valor p
β_0	80,168	0,134	598,655	$< 0,01$
β_1	152,943	4,834	31,640	$< 0,01$
λ	0,808	0,016	49,829	$< 0,01$
σ	9,616	0,093	103,217	$< 0,01$
α	1,499	0,049	30,231	$< 0,01$

Tabela 2. Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Log-Weibull Exponenciada para os dados de megacolo chagásico.

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	Valor t	Valor p
β_0	86,075	0,648	132,866	$< 0,01$
β_1	118,309	2,128	55,604	$< 0,01$
λ	0,062	0,004	15,260	$< 0,01$
σ	5,407	0,092	58,540	$< 0,01$

Tabela 3. Estimativas de máxima verossimilhança, erro-padrão, estatística t e valor p para os parâmetros do modelo Log-Burr XII para os dados de megacolo chagásico.

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	Valor t	Valor p
β_0	-70,439	0,455	-154,733	$< 0,01$
β_1	139,561	0,455	306,571	$< 0,01$
λ	0,060	0,016	3,704	$< 0,01$
γ	3,641	0,969	3,759	$< 0,01$

A Figura 14 representa o gráfico da função de sobrevivência do modelo Weibull Generalizada e os valores observados (Turnbull) para os dados de megacolo chagásico. Nota-se, que os valores da função de sobrevivência não se encontram próximos dos valores observados, não acontecendo o mesmo nas Figuras 15 e 16, em que os valores das funções de sobrevivência dos modelos Log-Weibull Exponenciada e Log-Burr XII encontram-se mais próximos destes.

Com base no Log da verossimilhança dos modelos LNG e WE (apresentados em Silveira et al. (2010)) e nos modelos propostos neste trabalho, foram calculados os valores do AIC_C. Observa-se na Tabela 4 que o modelo Log-Weibull Exponenciada, apresentando um AIC_C menor (94,832), ajustou-se melhor aos dados de megacolo chagásico.

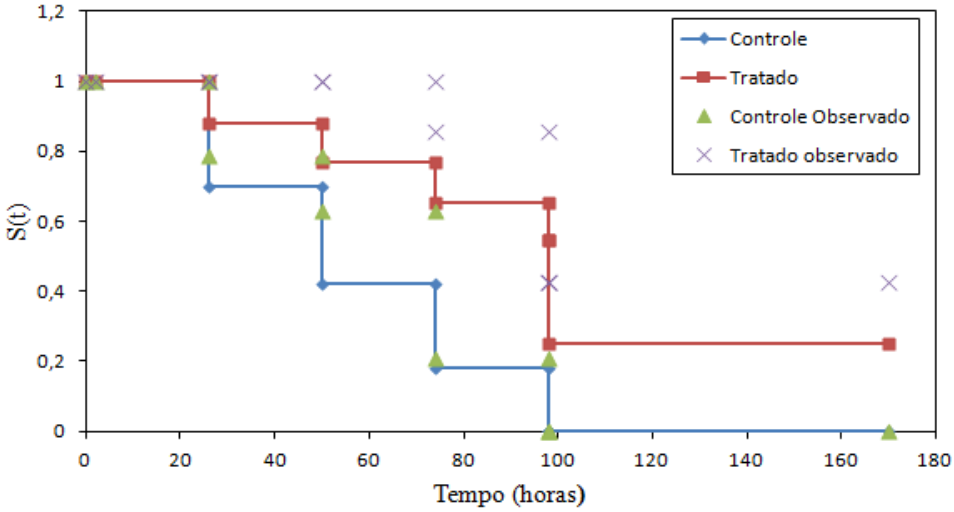

Figura 14 - Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo WG (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados).

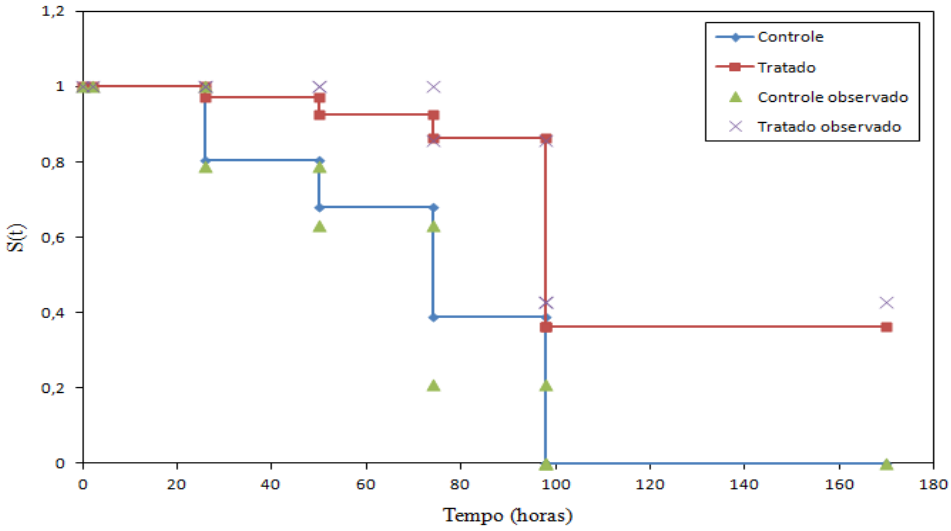

Figura 15 - Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo LWE (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados).

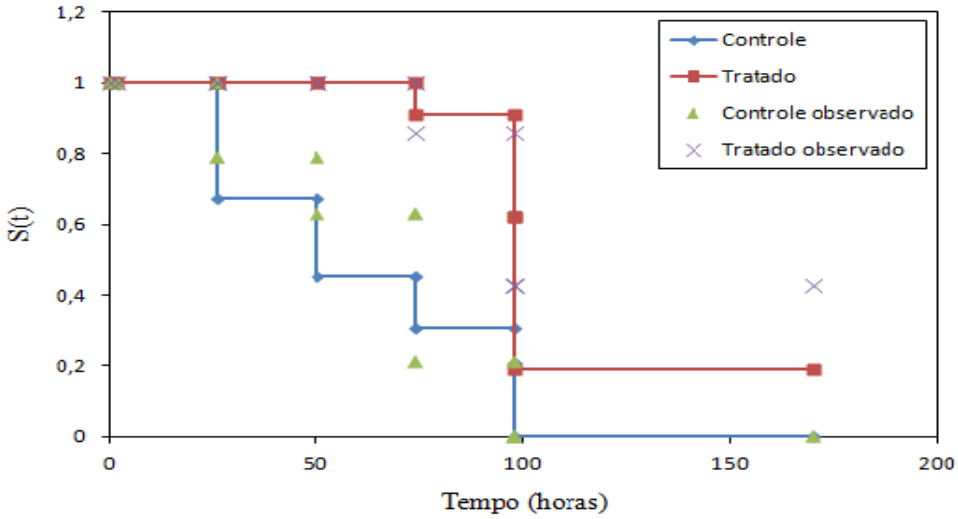

Figura 16 - Funções de sobrevivência estimada pelo Turnbull (valores observados) e pelo modelo Log-Burr XII (valores ajustados) para ambos os grupos (controle e pós-operados).

Tabela 4. Valores do AIC_C para os modelos Weibull Exponenciada, Lognormal Generalizada, Weibull Generalizada, Log-Weibull Exponenciada e Log-Burr XII ajustados aos dados de megacolo chagásico.

Modelo	AIC_C
Log-Weibull Exponenciada	94,832
Weibull Generalizada	102,244
Lognormal Generalizada	106,75
Log-Burr XII	107,254
Weibull Exponenciada	113,8

6 PERSPECTIVAS FUTURAS

No futuro, pretende-se trabalhar com outras distribuições, como por exemplo Beta Weibull e Log-Beta Weibull, aplicando-se a mesma metodologia utilizada neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKAIKE, H. A New Look at the Statistical Model Identification. **IEEE Transactions on Automatic Control AC**, v.19, p.716–723, 1974.

ALMEIDA, A. C. Resultados funcionais da operação de Duhamel-Haddad no tratamento do megacolo chagásico. Goiânia, 1996. 79p. Dissertação - Universidade Federal de Goiás.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. **Model Selection and Multimodel Inference A Practical Information-Theoretic Approach**. Colorado State University: Springer-2ed, 1998. 498p.

CANCHO, V. G.; ORTEGA, E. M. M.; BOLFARINE, H. The Log-exponentiated-Weibull Regression Models with Cure Rate: Local Influence and Residual Analysis. **Journal of Data Science**, v.7, n.4, p.433–458, 2009.

CARRASCO, J. M. F.; ORTEGA, E. M. M.; PAULA, G. A. Log-modified Weibull regression models with censored data: Sensitivy and residual analysis. **Computational Statistics and Data Analysis**, v.52, p.4021–4039, 2008.

CHALITA, L. V. A. S. Modelos para dados Agrupados e Censurados. Piracicaba, 1997. 65p. Tese (Doutorado) - ESALQ/USP.

CHALITA, L. V. A. S.; COLOSIMO, E. A.; DEMÉTRIO, C. B. G. Likelihood Approximations and Discrete Models for Tied Survival Data. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v.31, n.1, p.1215–1229, 2002.

CHEN, G. Generalized Log-Normal distributions with reliability application. **Computational Statistics and Data Analysis**, v.19, p.309–319, 1995.

COLLETT, D. **Modelling Survival Data in Medical Research**. Londom-2ed: Chapman and Hall, 2003. 500p.

COLOSIMO, E. A.; CHALITA, L. V. A. S.; DEMÉTRIO, C. G. B. Tests of Proportional Hazards and Proportional Odds Models for Grouped Survival Data. **Biometrics**, v.56, p.1233–1240, 2000.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de Sobrevivência Aplicada**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 392p.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. M. C. Limiting form of frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v.24, p.180–190, 1928.

HASHIMOTO, E. M.; ORTEGA, E. M. M.; CANCHO, V. G.; CORDEIRO, G. M. The log-exponentiated Weibull regression model for interval-censored data. **Computational Statistics and Data Analysis**, v.54, p.1017–1035, 2010.

LAWLESS, J. F. **Statistical Models and Methods For Lifetime Data**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

LINDSEY, J. C.; RYAN, L. M. Tutorial in Biostatistics: methods for interval censored data. **Statistics in Medicine**, v.17, p.219–238, 1998.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FREIMER, M. The Exponentiated Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data. **Technometrics**, v.37, n.4, p.436–445, 1995.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; KOLLIA, G. D. A Generalization of the Weibull distribution with application to the Analysis of Survival Data. **Journal of Applied Mechanics**, v.91, n.436, p.1575–1583, 1996.

PAL, M.; ALI, M. M.; WOO, J. Exponentiated Weibull Distribution. **Statistica**, , n.2, p.139–147, 2006.

RODRIGUEZ, R. N. A Guide to the Burr Type XII distributions. **Biometrika**, v.64, n.1, p.129–134, 1977.

ROSEN, P.; RAMMLER, B. The laws governing the fineness of powdered coal. **Journal of the Institute of Fuels**, v.6, p.246–249, 1933.

SAS. Software, SAS Institute Inc., Cary, NC, USA, versão 9.2 ed., 2008.

SILVA, G. O. Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico beta Weibull modificada. Piracicaba, 2008. 33–35p. Tese D - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz.

SILVA, G. O.; ORTEGA, E. M. M.; PAULA, G. A. The beta modified Weibull distribution. **Lifetime Data Anal**, v.16, p.409–430, 2010.

SILVEIRA, L. V. A.; COLOSIMO, E. A.; PASSOS, J. R. S. Generalized Log-Normal Model for Grouped Survival Data. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, v.39, p.2659–2666, 2010.

SOLIMAN, A. A. Estimation of parameters of life from progressively censored data using Burr XII model. **IEEE Transaction on reliability**, v.54, p.34–42, 2005.

SOUZA, W. B.; MORAIS, A. L.; CORDEIRO, G. M. The Weibull-Geometric distribution. **Journal of Statistical Computational and Simulation**, v.81, n.5, p.645–657, 2011.

WANG, F. K.; KEATS, J. B.; ZIMMER, W. J. Maximum likelihood estimation of the Burr XII parameters with censored and uncesored data. **Microelectron reliability**, v.36, p.359–362, 1996.

WEIBULL, W. A statistical theory of the strength of material. **Ingeniors Vetenskapa Academiens Handligar**, v.151, p.1–45, 1939.

WEIBULL, W. A statistical distribution function of wide applicability. **Journal of Applied Mechanics**, v.18, p.293–296, 1951.

WU, J. W.; CHEN, Y. I.; CHANG, C. T. Statistical Inference based on progressively censored samples with random removals from the Burr type XII distribution. **Journal of Statistical Computational and Simulation**, v.77, p.19–27, 2007.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability analysis. **Journal of Quality Tecnology**, v.30, p.389–394, 1998.

APÊNDICES

Apêndice A: Componentes da matriz de informação para o caso Weibull Generalizada

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \lambda^2} = \rho_i \left[-\frac{\ln\left(\rho_i^\lambda\right)}{\lambda^2} + \frac{-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}}{\lambda \tau_i} \right]^2 + \rho_i \left[\frac{2\ln\left(\rho_i^\lambda\right)}{\lambda^3} - \frac{2\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)}{\lambda^2 \tau_i^2} + \frac{1}{\lambda \tau_i} \left(\frac{-2\eta_i \eta_{i-1} + 2\rho_i^\lambda \left(\eta_{i-1}\right)^2}{\tau_{i-1}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\left(-\eta_i^2 + \rho_i^\lambda \eta_{i-1} \eta_i\right)}{\lambda \tau_i^2} - \left(\frac{-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right) \frac{\eta_{i-1}}{\lambda \tau_i} \right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \lambda \partial \sigma} = \frac{1}{\tau_i} \left[\frac{\rho_i}{\sigma \gamma} \left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) \left(\frac{-\ln(\rho_i^\lambda)}{\lambda^2} + \frac{-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}}{\lambda \tau_i} \right) \right] + \rho_i \left[-\frac{1}{\lambda \gamma \sigma} \left(\frac{\eta_i}{\tau_i} - \eta_{i-1} \right) + \frac{1}{\lambda \gamma \sigma \tau_i} \left(\eta_i + \frac{2\lambda \eta_i \eta_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right.\right.$$

$$\left.\left. -2\lambda \rho_i^\lambda (\eta_{i-1})^2 - \tau_i \eta_{i-1} \right) - \frac{\lambda \eta_i}{\lambda \gamma \sigma \tau_i^2} \left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)}{\sigma \gamma \tau_i} \right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \lambda \partial \gamma} = \frac{1}{\lambda \tau_i} \left[\frac{\rho_i}{\gamma^2} \left(\frac{\omega_i}{\rho_i^\lambda} - \rho_i^\lambda \omega_{i-1} \right) \left(\frac{-\ln(\rho_i^\lambda)}{\lambda} + \frac{-\eta_i + \rho_i^\lambda}{\tau_i} \right) \right] + \rho_i^\lambda \left[-\frac{1}{\lambda \tau_i} \left(\frac{\omega_i}{\gamma^2} - \rho_i^\lambda \omega_{i-1} \right) + \frac{1}{\lambda \gamma^2 \tau_i} \left(\omega_i + \frac{\lambda \eta_{i-1}}{\tau_{i-1}} \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\frac{\eta_i \omega_{i-1}}{\eta_{i-1}} + \omega_i - 2\rho_i^\lambda \omega_{i-1} \right) - \tau_i \omega_{i-1} \right) - \frac{\omega_i}{\gamma^2 \tau_i^2} \left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{\omega_{i-1}}{\gamma^2 \tau_i \tau_{i-1}} \left(\eta_i + \rho_i^\lambda\right) \right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \lambda \partial \beta_0} = \frac{1}{\lambda^2 \tau_i} \left[\rho_i \left(\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right) \left(-\frac{\ln(\rho_i^\lambda}{\lambda} + \frac{\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)}{\tau_i} \right) \right] + \frac{\rho_i \lambda}{\lambda \tau_i} \left[-\frac{\left(\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right)}{\lambda} + \frac{\xi_i}{\lambda} + \frac{1}{\tau_{i-1}} \left(\eta_i \xi_{i-1} + \eta_{i-1} \xi_i \right.\right.$$

$$-2\rho_i^\lambda \eta_{i-1}\xi_{i-1}\Big) - \frac{\rho_i^\lambda \xi_{i-1}}{\lambda} - \frac{\xi_i}{\tau_i}\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)\Bigg].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial\lambda\partial\beta_1} = \frac{1}{\lambda^2\tau_i}\left[\frac{\rho_i \ln(\rho_i^\lambda)}{\lambda}(\xi_i - \xi_{i-1}) + \frac{(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1})}{\tau_i}\right] + \frac{\rho_i x_l}{\lambda\tau_i}\left[\frac{\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left(\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right) + \frac{1}{\tau_{i-1}}(\eta_i\xi_{i-1}\right.$$

$$\left. + \eta_{i-1}\xi_i - 2\rho_i^\lambda \eta_{i-1}\xi_{i-1}\right) - \frac{\xi_i}{\tau_i}\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(-\eta_i + \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)\Bigg].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial\sigma^2} = \frac{\rho_i}{\sigma^2\gamma^2\tau_i^2}\left[\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)^2 - \frac{\eta_i}{\tau_i}(1+\gamma) - \frac{2\lambda\eta_i\eta_{i-1}}{\tau_i\tau_{i-1}} + \frac{2\lambda(\eta_{i-1})^2\rho_i^\lambda}{\tau_i\tau_{i-1}} + \frac{\rho_i^\lambda \eta_{i-1}}{\tau_i} - \frac{\eta_{i-1}}{\gamma\tau_i\tau_{i-1}}\right] - \frac{\lambda\rho_i\eta_i}{\sigma\gamma^2\tau_i^2}$$

$$\left[\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right] + \frac{\lambda\rho_i\eta_{i-1}}{\sigma^2\tau_i\tau_{i-1}}\left[\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial\sigma\partial\gamma} = \frac{\rho_i^{1-2\lambda}}{\lambda\sigma\gamma^3\tau_{i-1}^2}\left[\left(\omega_i - \rho_i^\lambda\right)\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)\right] + \frac{\rho_i}{\sigma\gamma^3\tau_i}\left[\frac{1}{\tau_{i-1}}\left(\frac{(\omega_i - \eta_i\gamma)}{\lambda} + \frac{\lambda}{\tau_{i-1}}\left(-\eta_i\omega_{i-1} + 2\rho_i^\lambda \eta_{i-1}\omega_{i-1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\eta_{i-1}\omega_i + \rho_i(\omega_{i-1} + \gamma\eta_{i-1})\right) + \lambda\left(\frac{\omega_i(\eta_i - \rho_i^\lambda)}{\tau_i} + \frac{\omega_{i-1}}{\tau_{i-1}}(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1})\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial\sigma\partial\beta_0} = \frac{\rho_i}{\gamma\tau_i}\left[\frac{\gamma}{\lambda^2\tau_i}\left(\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right)^2 + \left[-\lambda\xi_i + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{\tau_{i-1}}\left(-\eta_i\xi_{i-1} - \eta_{i-1}\xi_i + 2\eta_{i-1}\rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right) + \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right]\right] - \frac{\xi_i}{\sigma\tau_i}\right.$$

$$\left.\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \xi_{i-1}\left(\eta_i - \frac{\rho_i^\lambda \eta_{i-1}}{\tau_{i-1}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial\sigma\partial\beta_1} = \frac{\rho_i x_l}{\gamma}\left[\frac{1}{\lambda\sigma\tau_i^2}\left(\xi_i - \rho_i^\lambda \xi_{i-1}\right)\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{1}{\tau_i}\left(\frac{\xi_i}{\lambda} + \frac{1}{\tau_{i-1}}\left(\eta_i\xi_{i-1} + \frac{\eta_{i-1}\xi_i + 2\rho_i^\lambda \eta_{i-1}\xi_{i-1}}{\sigma} + \frac{\tau_{i-1}\xi_{i-1}\rho_i^\lambda}{\lambda\sigma}\right)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\xi_i}{\sigma\tau_i^2}\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right) + \frac{\lambda\xi_{i-1}}{\sigma\tau_{i-1}}\left(\eta_i - \rho_i^\lambda \eta_{i-1}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\gamma^2} = \frac{\rho_i}{\gamma^4}\left[\frac{1}{\rho_i^{2\lambda}\tau_{i-1}^2}\left(\omega_i - \rho_i^\lambda\omega_{i-1}\right)^2 + \frac{2}{\tau_i\tau_{i-1}}\left[\omega_i\left(\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}\right) - \frac{\lambda\omega_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(\omega_i + \rho_i^\lambda\omega_{i-1}^2\right) - \rho_i^\lambda\tau_{i-1}\left(\frac{-\lambda\omega_{i-1}-\gamma\omega_{i-1}}{\lambda}\right)\right]\right.$$

$$\left. -\frac{\omega_i}{\tau_i^2}\left(\lambda\omega_i - \tau_i\tau_{i-1}\omega_{i-1}\right) + \frac{\lambda\omega_{i-1}}{\tau_i\tau_{i-1}}\left(\omega_i - \gamma^2\rho_i^\lambda\omega_{i-1}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\gamma\partial\beta_0} = \frac{\rho_i}{\lambda\gamma^2}\left[\frac{1}{\rho_i^{2\lambda}\tau_{i-1}^2}\left(\xi_i - \rho_i^\lambda\xi_{i-1}\right)\left(\omega_i - \rho_i^\lambda\omega_{i-1}\right) + \frac{1}{\tau_i}\left[-\xi_i\ln(\eta_i^\gamma) - \gamma\xi_{i-1} - \frac{\lambda}{\tau_{i-1}}\left(\omega_i\xi_{i-1} - \omega_{i-1}\xi_i + 2\rho_i^\lambda\omega_{i-1}\xi_{i-1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\rho_i^\lambda\left(-\ln(\eta_{i-1}^\gamma) \quad -\gamma\xi_{i-1}\right)\right] - \left(\frac{\xi_i}{\tau_i^2} + \frac{\xi_{i-1}}{\tau_i\tau_{i-1}}\right)\left(\lambda\omega_i - \gamma^2\rho_i^\lambda\omega_{i-1}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\gamma\partial\beta_1} = \rho_i x_l\left[\frac{1}{\lambda\gamma^2\rho_i^{2\lambda}\tau_{i-1}}\left(\xi_i - \rho_i^\lambda\xi_{i-1}\right)\left(\frac{\omega_i - \tau_i\tau_{i-1}\omega_{i-1}}{\tau_{i-1}}\right) + \frac{1}{\lambda\gamma\tau_i}\left[\xi_i\left(\frac{\ln(\eta_i^\gamma)-\gamma}{\gamma}\right) + \frac{\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(-\gamma^2 + 2\lambda\rho_i^\lambda\omega_{i-1} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\tau_i\tau_{i-1}^2\left(\frac{-\ln(\eta_{i-1}^\gamma - \gamma)}{\gamma}\right)\right)\right] - \frac{\xi_i}{\tau_i^2}\left(\frac{\omega_i - \gamma^2\rho_i^{2\lambda}\omega_{i-1}}{\gamma^2\rho_i^\lambda}\right) + \frac{\xi_{i-1}}{\tau_i\tau_{i-1}}\left(\frac{\omega_i - \gamma^2\rho_i^\lambda\omega_{i-1}}{\gamma^2}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\beta_0^2} = \rho_i\left[\frac{(\xi_i - \xi_{i-1})^2}{\lambda^2\tau_i^2} + \frac{1}{\lambda\tau_i}\left[\frac{\xi_i}{\eta_i^\gamma}\left(\frac{-1+\gamma}{\gamma}\right) + \xi_{i-1}\left(\frac{-2(\xi_i + \rho_i^\lambda\xi_{i-1})}{\tau_{i-1}}\right) - \rho_i^\lambda\left(\frac{-\eta_{i-1}^\gamma + \gamma\eta_i^\gamma}{\gamma(\eta_i\eta_{i-1})^\gamma}\right)\right]\right. - \frac{\rho_i}{\lambda\tau_i}\left(\frac{\xi_i(\xi_i - \rho_i^\lambda\xi_{i-1})}{\tau_i} + \right.$$

$$\left.\left.\frac{\xi_{i-1}(\eta_i - \rho_i^\lambda\xi_{i-1})}{\tau_{i-1}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\rho_i x_l}{\tau_{i-1}}\left[\frac{(\xi_i - \rho_i^\lambda\xi_{i-1})^2}{\lambda^2\rho_i^{2\lambda}\tau_{i-1}} + \frac{\xi_{i-1}}{\lambda\tau_i}\left[\frac{-1+\gamma}{\gamma\sigma\eta_i^\gamma} + \frac{2}{\tau_{i-1}}\left(\xi_{i-1} + \rho_i^\lambda\xi_{i-1}\right) - \frac{\rho_i\tau_{i-1}(-1+\gamma)}{\sigma\eta_{i-1}^\gamma}\right] - \left(\frac{\xi_i^2 - (\rho_i^\lambda\xi_{i-1})^2}{\lambda\rho_i^\lambda\tau_i}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\rho_i}{\partial\beta_1^2} = \frac{\rho_i x_l}{\lambda\tau_i}\left[\frac{1}{\tau_i}(\xi_i - \rho_i^\gamma\xi_{i-1})^2 + \frac{x_l\xi_i}{\sigma\eta_i^\gamma}\left(\frac{-1+\gamma}{\gamma}\right) - \frac{2\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(\xi_i + \rho_i^\lambda\xi_{i-1}\right) - \rho_i^\lambda x_l\xi_{i-1}\left(\frac{-1+\gamma}{\gamma\sigma\eta_{i-1}^\gamma}\right) - \frac{\xi_i x_l}{\tau_i}\left(\xi_i - \rho_i^\gamma\xi_{i-1}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{x_l\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(\xi_i - \rho_i^\gamma\xi_{i-1}\right)\right].$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \lambda} = \frac{\rho_i}{\lambda \tau_i}\left(\frac{-\tau_i \ln(\rho_i^{\lambda}) + \lambda(-\eta_i + \rho_i^{\lambda}\eta_{i-1})}{\lambda}\right); \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial \sigma} = \frac{\lambda \rho_i}{\tau_i \sigma \gamma}\left(\eta_i - \rho_i^{\lambda}\eta_{i-1}\right); \qquad \frac{\partial \rho_i}{\partial \gamma} = \frac{\rho_i}{\gamma^2 \tau_i}\left(\omega_i - \rho_i^{\lambda}\omega_{i-1}\right);$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \beta_0} = \frac{\rho_i}{\lambda \tau_i}\left(\xi_i - \rho_i^{\lambda}\xi_{i-1}\right); \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial \beta_1} = \frac{\rho_i x_l}{\lambda \tau_i}\left(\xi_i - \rho_i^{\lambda}\xi_{i-1}\right); \quad \eta_i = \left[\frac{a_i - \beta_0 - \beta_1 x_l}{\sigma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}; \quad \eta_{i-1} = \left[\frac{a_{i-1} - \beta_0 - \beta_1 x_l}{\sigma}\right]^{\frac{1}{\gamma}};$$

$$\tau_i = 1-\lambda\eta_i; \quad \tau_{i-1} = 1-\lambda\eta_{i-1}; \rho_i = \left(\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}; \quad \xi_i = \frac{\lambda\eta_i}{\gamma\sigma\eta_i^{\gamma}}; \quad \xi_{i-1} = \frac{\lambda\eta_{i-1}}{\gamma\sigma\eta_{i-1}^{\gamma}}; \quad \omega_i = \eta_i \ln(\eta_i^{\gamma}); \qquad \omega_i = \eta_{i-1}\ln(\eta_{i-1}^{\gamma});$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_l)^{\Delta l_i}(1-p_i(x_l))^{1-\Delta l_i} = \prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i)^{\Delta l_i}(\rho_i)^{1-\Delta l_i} \qquad l = \ln L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in D}\{\Delta l_i \ln(1-\rho_i) + (1-\Delta l_i)\ln(\rho_i)\}.$$

Estas derivadas podem ser generalizadas para $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$, em que p corresponde ao número de covariáveis do modelo.

O código no SAS usado para a estimação dos parâmetros do modelo Weibull Generalizada é apresentado a seguir:

```
data megacolo;
set work.megacolo;
grupo=grupo-1;
proc nlp data=megacolo cov=j pstderr
tech=NEWRAP maxfunction=200/*outest=paramet*/ outvar=arq_var;
max loglik;

parms  lambda=-1 to 0 by 0.05,
sigma=6 to 15 by 1,
beta0=10 to 80 by 10,
beta1=150 to 250 by 10,
gama=3 to 9 by 1;
bounds  sigma > 0,gama>0;
```

```
aiL=(ai-(beta0+beta1*grupo))/sigma;
aiL_1=(ai_1-(beta0+beta1*grupo))/sigma;

Fai=1-(1-lambda*(aiL**1/gama))**(1/lambda);
Fai_1=1-(1-lambda*(aiL_1**1/gama))**(1/lambda);

pi=(Fai-Fai_1)/(1-Fai_1);

s=log(1-pi);
if censura=1 then s + log((pi)/(1-pi));
loglik = s;

run;
```

Apêndice B: Componentes da matriz de informação para o caso Log-Weibull Exponenciada

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\lambda^2} = \frac{1}{\tau_{i-1}}\left[(-2\epsilon_i + \epsilon_{i-1}\delta_i) + \frac{2\epsilon_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(-\epsilon_i + 2\omega_{i-1}\delta_i\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\lambda\partial\sigma} = \frac{\rho_i}{\sigma^2\tau_{i-1}}\left[\frac{1}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}\left(\iota_i + \frac{\psi_i\iota_{i-1}}{\lambda}\right) + \iota_{i-1}\left(\frac{\xi_i\rho_{i-1}\psi_{i-1}}{\rho_i} - \frac{2\delta_i\rho_{i-1}}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}\tau_{i-1}} - \frac{\xi_{i-1}\tau_i\tau_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right) - \iota_i\left(\frac{\psi_i\xi_{i-1}}{\tau_{i-1}} - \frac{\rho_i\varphi_i\psi_{i-1}\rho_{i-1}}{\lambda}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\lambda\partial\beta_0} = \frac{1}{\sigma\tau_{i-1}}\left(\frac{\lambda\xi_i\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}} + \psi_i\iota_i - \frac{\psi_{i-1}\delta_i\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right) + \frac{1}{\sigma\tau_{i-1}^2}\left(\lambda\psi_i\psi_{i-1}\iota_i + \psi_i\xi_{i-1}\iota_{i-1} - 2\lambda\delta_i\psi_{i-1}\xi_{i-1}\iota_{i-1}\right) - \frac{-\lambda\delta_i\iota_{i-1}\ln(\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}})}{\sigma\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\lambda\partial\beta_1} = \frac{\lambda x_l}{\sigma}\left[\frac{\iota_i}{\tau_{i-1}}\left(\frac{\xi_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}} + \frac{\psi_i}{\lambda} + \frac{\psi_i\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}} - \frac{3\delta_i\tau_{i-1}\ln(\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}})}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right) + \frac{\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}}\left(\frac{\xi_i}{\tau_{i-1}} - \frac{\delta_i}{\lambda}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4\tau_{i-1}}\left[\psi_i\rho_i^2\iota_i^2\left(\frac{1}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}} - \frac{1}{\lambda\iota_i} + \frac{1}{\lambda\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}\right) + \sigma\rho_i\iota_i\psi_i\left(\frac{-2 + \rho_i\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})}{\lambda\sigma} - \frac{2\rho_{i-1}\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\sigma\tau_{i-1}}\right) + \psi_{i-1}\delta_i\rho_i^2\iota_{i-1}^2\left(\frac{2\psi_{i-1}}{\tau_{i-1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}} + \frac{2\sigma}{\rho_i\iota_{i-1}} + \frac{1}{\lambda\iota_{i-1}}\right) - \frac{\delta_i\psi_{i-1}\rho_{i-1}^2\iota_{i-1}^2}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\sigma\partial\beta_0} = \frac{\rho_i}{\sigma^3\tau_{i-1}}\left[\psi_i\iota_i\left(-\frac{\lambda\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}} - \frac{\lambda\sigma}{\rho_i} - 1 - \ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}) + \frac{\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}\right) + \frac{\lambda\psi_{i-1}\rho_{i-1}\iota_{i-1}}{\rho_i}\left(-\frac{\iota_i}{\tau_{i-1}} + \frac{2\delta_i\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}} + \frac{\delta_i\iota_{i-1}}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}} + \frac{\sigma}{\rho_{i-1}}\right) + \right.$$

$$\left.\psi_{i-1}\iota_{i-1}\left(-\frac{\lambda}{\tau_{i-1}} + \delta_i(1 + \ln(1-\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}})) - \frac{\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\sigma\partial\beta_1} = -\frac{\lambda x_l\rho_i\psi_i\iota_i}{\sigma^3\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}\tau_{i-1}}\left[\iota_i - \frac{\iota_i}{\sigma\rho_i} - \frac{1}{\lambda}\left(1 + \ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})\right) + \iota_i\right] + \frac{\delta_i\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\sigma^2\tau_{i-1}}\left[\frac{\lambda x_l\rho_{i-1}\iota_{i-1}}{\sigma\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\left(-\frac{1}{\lambda} + 1 - \frac{\rho_i\iota_i\iota_{i-1}\psi_i}{\rho_{i-1}}\right) + \right.$$

$$\frac{\lambda\rho_{i-1}}{\delta_i\tau_{i-1}}\left(\psi_i\iota_i+2x_l\rho_i\iota_{i-1}\psi_{i-1}\right)+\left(\lambda x_l+\frac{\rho_i}{\lambda}(x_l+\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}))\right)\Bigg].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\partial\beta_0^2}=\frac{\lambda}{\sigma^2\tau_{i-1}}\left[\psi_i\iota_i\left(-\frac{\lambda\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-1-\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})+\frac{\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-\frac{2\lambda\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}}\right)+\delta_i\psi_{i-1}\iota_{i-1}\left(\frac{2\lambda\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}}+\frac{\lambda\iota_{i-1}}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}+\ln(1-\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}})-\frac{\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\beta_0\partial\beta_1}=\frac{\lambda x_l}{\sigma^2\tau_{i-1}}=\left[\psi_i\iota_i\left(\frac{\lambda\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-1-\ln(1-\omega^{\frac{1}{\lambda}})+\frac{\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-\frac{2\lambda\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}}\right)+\psi_{i-1}\iota_{i-1}\left(\frac{2\lambda\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau_{i-1}}+\frac{\lambda\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}+1+\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})+\frac{\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\beta_1^2}=\frac{\lambda x_l}{\sigma^2\tau_{i-1}}\left[\psi i\iota_i\left(\frac{\lambda\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-1-\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})+\frac{\iota_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}}-\frac{2\lambda\iota_{i-1}\psi_{i-1}}{\tau_{i-1}}\right)+\delta_i\iota_{i-1}\psi_{i-1}\left(\frac{2\lambda\psi_{i-1}\iota_{i-1}}{\tau-i-1}+\frac{\lambda\iota_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}+1+\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})-\frac{\iota_{i-1}}{\delta_i\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}}\right)\right].$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\lambda}=\frac{1}{\tau_{i-1}}\left(-\xi_i+\rho_i\xi_{i-1}\right);\qquad\frac{\partial\varphi_i}{\partial\sigma}=\frac{1}{\sigma^2\tau_{i-1}}\left(\psi_i\rho_i\iota_i-\delta_i\psi_{i-1}\rho_{i-1}\iota_{i-1}\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta_0}=\frac{\lambda}{\sigma\tau_{i-1}}\left(\psi_i\iota_i-\delta_i\psi_{i-1}\iota_{i-1}\right);\qquad\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta_1}=\frac{\lambda x_l}{\sigma\tau_{i-1}}\left(\psi_i\iota_i-\delta_i\psi_{i-1}\iota_{i-1}\right);\qquad\tau_i=1-\omega_i;\qquad\tau_{i-1}=1-\omega_{i-1};$$

$$\varphi_i(x_l)=\frac{1-\left\{1-\exp\left(-\exp\left(\frac{a_i-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)\right)\right\}^{\lambda}}{1-\left\{1-\exp\left(-\exp\left(\frac{a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)\right)\right\}^{\lambda}};\qquad\omega_i=\left\{1-\exp\left(-\exp\left(\frac{a_i-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)\right)\right\}^{\lambda};$$

$$\omega_{i-1}=\left\{1-\exp\left(-\exp\left(\frac{a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)\right)\right\}^{\lambda};\quad\delta_i=\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}};\quad\psi_i=\frac{\omega_i}{\omega_i^{\frac{1}{\lambda}}};\quad\psi_{i-1}=\frac{\omega_{i-1}}{\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}}};\quad\xi_i=\omega_i\ln(\omega_i^{\frac{1}{\lambda}});$$

$$\xi_{i-1}=\omega_{i-1}\ln(\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}});\quad\rho_i=\lambda(a_i-\beta_0-\beta_1x_l);\quad\rho_{i-1}=\lambda(a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l);\quad\iota_i=-\ln(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}})(1-\omega_i^{\frac{1}{\lambda}});$$

$$\iota_{i-1}=-\ln(1-\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}})(1-\omega_{i-1}^{\frac{1}{\lambda}});\qquad L=\prod_{i=1}^{n}\left(p_i(x_l)\right)^{\Delta l_i}(1-p_i(x_l))^{1-\Delta l_i}=\prod_{i=1}^{n}(1-\varphi_i(x_l))^{\Delta l_i}(\varphi_i(x_l)^{1-\Delta l_i};$$

$$l=\ln L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in D}\left\{\Delta l_i\ln(1-\varphi_i(x_l))+(1-\Delta l_i)\ln(\varphi_i(x_l))\right\}.$$

Estas derivadas podem ser generalizadas para $\boldsymbol{\beta'}=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$, em que p corresponde ao número de covariáveis do modelo.

O código no SAS usado para a estimação dos parâmetros do modelo Log-Weibull Exponenciada é apresentado a seguir:

```
data megacolo;
set work.megacolo;
grupo=grupo-1;
proc nlp data=megacolo cov=j pstderr tech=NEWRAP maxfunction=200
outest=paramet outvar=arq_var;
max loglik;
parms   lambda=0.01 to 0.08 by 0.01,
sigma=1 to 15,
beta0=80 to 90,
beta1=100 to 120;

bounds lambda >0, sigma > 0;

aiL=(ai-(beta0+beta1*grupo))/sigma;
aiL_1=(ai_1-(beta0+beta1*grupo))/sigma;
Fai=(1-exp(-exp(aiL)))**lambda;
Fai_1=(1-exp(-exp(aiL_1)))**lambda;

pi=(Fai-Fai_1)/(1-Fai_1);

s=log(1-pi);
if censura=1 then s + log((pi)/(1-pi));
loglik = s;

run;
```

Apêndice C: Componentes da matriz de informação para o caso Log-Burr XII

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\lambda^2} = \frac{-2\kappa_i\ln(\kappa_i)}{\lambda}; \qquad \frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\lambda\partial\sigma} = \frac{\kappa_i}{\epsilon_i\sigma}\left[(-\phi_i(\epsilon_i-1)-\nu_i\phi_{i-1}(\epsilon_{i-1}-1))\,(\ln(\kappa_i)+1)\right]$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\lambda\partial\beta_0} = \frac{\kappa_i}{\epsilon_i\sigma}\left[(1-\epsilon_i+\nu_i(\epsilon_{i-1}-1))(-\ln(\kappa_i)+1)\right]; \qquad \frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\lambda\partial\beta_1} = \frac{\kappa_i x_l}{\epsilon_i\sigma}\left[(1-\epsilon_i+\nu_i(\epsilon_{i-1}-1))(-\ln(\kappa_i)-1))\right];$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\sigma^2} = \left(\frac{\kappa_i\lambda^2}{\epsilon_i\sigma^2}\right)^2(\phi_i(1-\epsilon_i)+\nu_i\phi i-1(\epsilon_{i-1}-1))^4 + \frac{\kappa_i\lambda}{\epsilon_i\sigma^2}\left[\phi_i(\epsilon_i-1)(-2+\phi_i)+\frac{2\phi_{i-1}(\epsilon_{i-1}-1)}{(\epsilon_i-1)}(-\phi_i+\nu_i\phi_{i-1}\right.$$

$$(\epsilon_{i-1}-1))-\nu_i(\epsilon_{i-1}-1)(2\phi_i+\phi_{i-1}^2)\ -\phi_i^2\delta i\,(1-\epsilon_i+\nu_i(\epsilon_{i-1}-1))+(\phi_{i-1}\delta_{i-1})\,(\phi_i(1-\epsilon_i)+\nu_i\phi_{i-1}(\epsilon_{i-1}-1))\Big].$$

$$\left.-\epsilon_i\delta_{i-1})-\delta_i\,(\phi_i(1-\epsilon_i)+\phi_{i-1}\epsilon_i\delta_{i-1})+\delta_{i-1}(\phi_i(1-\epsilon_i)+\phi_{i-1}\epsilon_i\delta_{i-1})\right].$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\sigma\partial\beta_0} = \frac{\kappa_i\lambda}{\sigma^2\epsilon_i}\left[\frac{\lambda}{\epsilon_i\epsilon_{i-1}}((1-\epsilon_i+\epsilon_i(\epsilon_{i-1}-1))(\phi_i(1-\epsilon_i)+\epsilon_i\phi_{i-1}\delta_{i-1}))-((\epsilon_i-1)(1+\phi_i-\phi_i\delta_{i-1}-\phi_{i-1}\delta_{i-1})+\right.$$

$$\left.\epsilon_i\delta_{i-1}(2\phi_{i-1}\delta_{i-1}-1-\phi_{i-1}))-\delta_i(\phi_i(\epsilon_i-1)+\epsilon_i\phi_{i-1}\delta_{i-1})+\delta_{i-1}(\phi_i(\epsilon_i-1)+\epsilon_i\phi_{i-1}\delta_{i-1})\right].$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\sigma\partial\beta_1} = \frac{\kappa_i x_l\lambda}{\sigma^2\epsilon_i^2}\left[\frac{\lambda}{\epsilon_{i-1}}((1-\epsilon_i)\epsilon_{i-1}+\epsilon_i(\epsilon_{i-1}))\,(\phi_i(\epsilon_i-1)+\epsilon_i\phi_{i-1}\delta_{i-1})-\epsilon_i\,((\epsilon_i-1)(1+\phi_i)+(1-\epsilon_i)\delta_{i-1}(\phi_i+\phi_{i-1})+\right.$$

$$\left.\phi_{i-1}\delta_{i-1}(2\epsilon_i\delta_{i-1}-\epsilon_i)-\ \epsilon_i\delta_{i-1})-(\epsilon_i-1)(\phi_i(1-\epsilon_i)+\epsilon_i\phi_{i-1}\delta_{i-1})+\epsilon_i\delta_{i-1}(\phi_i(1-\epsilon_i)+\epsilon_i\phi_{i-1})\right].$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\beta_0^2} = \frac{\kappa_i\lambda}{\sigma^2\epsilon_i}\left[(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1})\left(\frac{\lambda(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1})}{\epsilon_i}+\delta_i+\delta_{i-1}\epsilon_i+(1-2\delta_{i-1})\right)\right].$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\kappa_i\lambda x_l}{\sigma^2}\left[(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1})\left(\frac{\lambda(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1})}{\delta_i^2\epsilon_{i-1}^2}-\frac{1}{\epsilon_i^2}+\frac{\delta_{i-1}}{\epsilon_i}\right)-(1-2\delta_{i-1})(\delta_i+\epsilon_i\delta_{i-1})\right].$$

$$\frac{\partial^2\kappa_i}{\partial\beta_1^2} = \frac{\kappa_i\lambda x_l}{\sigma^2}\left[(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1})\left(\frac{\lambda\nu_i^2}{\epsilon_{i-1}^2}-\frac{\delta_i}{\epsilon_i^2}+\frac{\delta_{i-1}}{\epsilon_i}+x_l(1-2\delta_{i-1})\right)\right].$$

$$\frac{\partial\kappa_i}{\partial\lambda} = \frac{\kappa_i\ln(\kappa_i)}{\lambda}; \qquad \frac{\partial\kappa_i}{\partial\sigma} = \frac{\kappa_i\lambda}{\epsilon_i\sigma}\left(\phi_i(1-\epsilon_i)+\nu_i\phi_{i-1}(\epsilon_{i-1}-1)\right); \qquad \frac{\partial\kappa_i}{\partial\beta_0} = \frac{\kappa_i\lambda}{\sigma\epsilon_i}\left(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1}\right)$$

$$\frac{\partial\kappa_i}{\partial\beta_1} = -\frac{\kappa_i\lambda x_l}{\sigma\epsilon_i}\left(1-\epsilon_i+\epsilon_i\delta_{i-1}\right); \qquad \epsilon_i = 1+\exp\left(\frac{a_i-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right); \quad \epsilon_{i-1} = 1+\exp\left(\frac{a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right); \quad \nu_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{i-1}}$$

$$\delta_i = \frac{\epsilon_i-1}{\epsilon_i}; \quad \delta_{i-1} = \frac{\epsilon_{i-1}-1}{\epsilon_{i-1}}; \quad \phi_i = \frac{a_i-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}; \quad \phi_{i-1} = \frac{a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}; \quad \kappa_i(x_l) = \left[\frac{1+\exp\left(\frac{a_i-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)}{1+\exp\left(\frac{a_{i-1}-\beta_0-\beta_1x_l}{\sigma}\right)}\right]^{-\lambda}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n}(p_i(x_l))^{\Delta l_i}(1-p_i(x_l))^{1-\Delta l_i} = \prod_{i=1}^{n}(1-\kappa_i)^{\Delta l_i}(\kappa_i)^{1-\Delta l_i}; \qquad l = \ln L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in D}\left\{\Delta l_i\ln(1-\kappa_i)+(1-\Delta l_i)\ln(\kappa_i)\right\}.$$

Estas derivadas podem ser generalizadas para $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$, em que p corresponde ao número de covariáveis do modelo.

O código no SAS usado para a estimação dos parâmetros do modelo Log-Burr XII é apresentado a seguir:

```
data megacolo;
set work.megacolo;
grupo=grupo-1;
proc nlp data=megacolo cov=j pstderr tech= NEWRAP  outvar=arq_var;
max loglik;
parms   lambda=0.1 to 1 by .10,
sigma=1 to 20,
beta0=0 to 10,
```

```
beta1=0 to 10;

bounds sigma>0, lambda>0;

aiL=(ai-(beta0+beta1*grupo))/sigma;
aiL_1=(ai_1-(beta0+beta1*grupo))/sigma;

Fai=1-(1+exp(aiL))**(-lambda);
Fai_1=1-(1+exp(aiL_1))**(-lambda);

pi=(Fai-Fai_1)/(1-Fai_1);

s=log(1-pi);
if censura=1 then s + log((pi)/(1-pi));
loglik=s;

run;
```